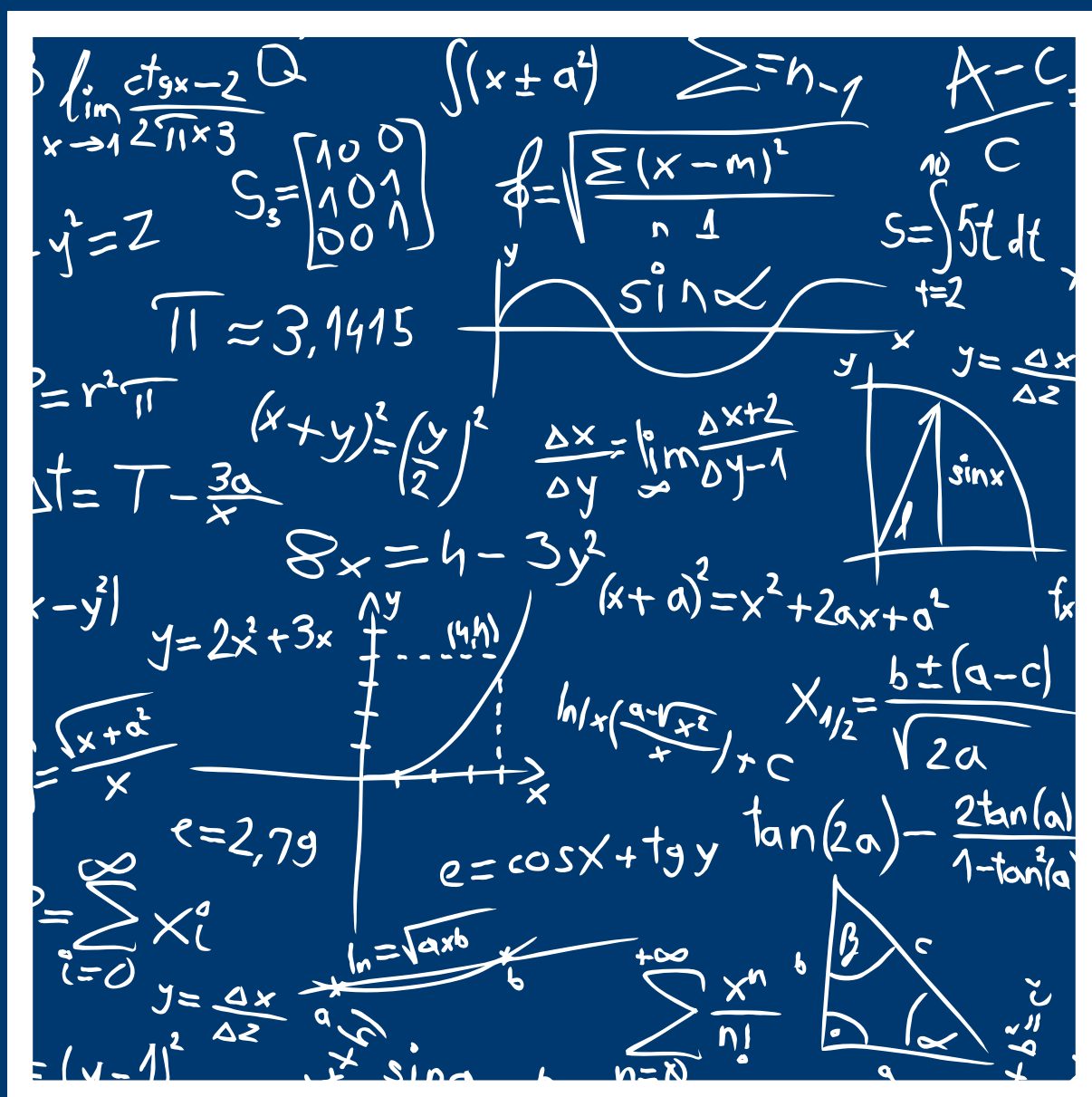


LAURA-ELENA MILITARU

CALCUL VARIAȚIONAL. APLICAȚII



LAURA-ELENA MILITARU

**CALCUL VARIATIIONAL.
APLICAȚII**

ISBN: 978-606-9734-59-9

Editura EVOMIND

2025

UNIVERSITATEA NAȚIONALĂ DE ȘTIINȚĂ ȘI TEHNOLOGIE
POLITEHNICA BUCUREȘTI
CENTRUL UNIVERSITAR PITEȘTI
FACULTATEA DE ȘTIINȚE, EDUCAȚIE FIZICĂ ȘI INFORMATICĂ
CONVERSIE PROFESIONALĂ ÎN MATEMATICĂ

LUCRARE DE ABSOLVIRE

CALCUL VARIAȚIONAL. APLICAȚII

Coordonator științific:
Lect. univ. dr. Antonio-Mihail NUICĂ

Absolvent:
Laura-Elena COSTACHE (MILITARU)

Cuprins

Introducere	5
Capitolul 1. Preliminarii	7
1.1. Spații topologice și spații metrice	7
1.2. Spații vectoriale	10
1.3. Continuitate și diferențiabilitate pentru funcții de mai multe variabile reale	13
1.4. Teorema de inversare locală și teorema funcțiilor implicite - cazul finit dimensional	17
1.5. Diverse integrale	18
Capitolul 2. Complemente de analiză pe varietăți	23
2.1. Multiplicatori Lagrange	24
2.2. Varietăți	24
2.3. Teorema funcțiilor implicite	26
2.4. Varietăți netede și varietăți orientabile	30
2.5. Varietăți "cu bord"	33
2.6. k -forme diferențiale și formula lui Stokes	34
2.7. Aplicația "arie"	35
Capitolul 3. Complemente de analiză funcțională	37
3.1. Spații vectoriale normate și uniform convergență	38
3.2. Funcționale liniare continue pe spații normate	43
3.3. Diferențiabilitate pe spații vectoriale normate	45
3.4. "Teorema funcțiilor implicite" pe spații vectoriale normate complete	47
Capitolul 4. Calcul variațional	49
4.1. Preliminarii	49
4.2. Cea mai simplă problemă variațională	50
4.3. Problema izoperimetrică	60
4.4. Probleme de integrale multiple	66
Bibliografie	73

Introducere

Lucrarea are ca subiect calculul variațional. Este structurată în patru capitole.

În primul capitol sunt recapitulate chestiuni de bază de topologie, algebră liniară și calcul diferențial și integral pe spații euclidiene, cu accent pe Teorema lui Weierstrass de mărginire a funcțiilor continue definite pe un compact, Principiul contractiei al lui Banach, "Teorema de inversare locală" și "Teorema funcțiilor implicite" pe cazul finit dimensional.

În al doilea capitol se definește conceptul de varietate k -dimensională în $\mathbb{R}^n$, se deduce o generalizare a "Teoremei funcțiilor implicite", ceea ce conduce la așa-numita "metodă a multiplicatorilor Lagrange". Se definește conceptul de varietate k -dimensională netedă (sau de clasă C^1), dar și cel de k -varietate-cu-bord netedă orientată compactă. O formă k -diferențială α pe o multime $U \subset \mathbb{R}^n$ este o aplicație care asociază în fiecare punct $\mathbf{x} \in U$ o funcție k -multiliniară alternată $\alpha(\mathbf{x}) = \alpha_{\mathbf{x}}$ pe $\mathbb{R}^n$; pentru o astfel de formă de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^n$ și pentru $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ o suprafață k -dimensională de clasă C^1 se poate vorbi despre integrala lui α pe φ . Se enunță (fără demonstrație) Teorema lui Stokes în trei forme. Toate conceptele și rezultatele din acest capitol sunt necesare în ultimul capitol, pentru a da un caracter autoconținut lucrării. Multe propoziții sau teoreme sunt doar enunțate, deducerea lor necesitând cunoștințe suplimentare avansate de analiză pe varietăți.

Capitolul al treilea debutează cu studiul spațiilor $C^0[a, b]$ (al tuturor funcțiilor continue definite pe intervalul $[a, b]$), sau $C^1[a, b]$ (spațiul funcțiilor diferențiabile cu derivată continuă definite pe $[a, b]$), deoarece probleme tipice de calcul variațional conduc la astfel de spații. Se definește o normă pe $C^0[a, b]$, norma "supremum", dar și o normă pe $C^1[a, b]$; acest lucru va face posibilă studierea funcțiilor reale definite pe $C^1[a, b]$ prin metodele calculului diferențial. Se studiază convergența simplă și uniformă a șirurilor de funcții, ceea ce va permite deducerea completitudinii atât a lui $C^0[a, b]$ dar și a lui $C^1[a, b]$ relativ la normele corespunzătoare. Se discută conceptele de liniaritate și continuitate pentru funcțiile de la un spațiu vectorial normat la altul. Definiția diferențiabilității, pentru aplicațiile pe spații vectoriale normate, este aceeași cu definiția de pe spații euclidiene, cu excepția faptului că trebuie explicit precizat ca aplicația liniară de aproximare să fie continuă. Se definește conceptul de mulțime tangentă și se dă o versiune a "Teoremei funcțiilor implicite" pentru aplicații definite pe spații vectoriale normate complete.

Calculul variațional este prezentat în ultimul capitol; el tratează o anumită clasă de probleme maxim-minim, care au în comun faptul că fiecare dintre ele este asociată cu un anumit fel de expresie integrală. Se discută un prim cel mai elementar exemplu de problemă de calcul variațional, apoi așa-numita „problemă izoperimetrică”, având un context ce seamănă cu problemele de extreme cu legături standard, iar demonstrarea ei va implica o generalizare a metodei multiplicatorilor Lagrange. Pentru aceste metode generale maxim-minim, se utilizează metodele

de „calcul în spații vectoriale normate” din capitolul anterior. În ultima secțiune se discută pe scurt probleme analoge celor din secțiunile anterioare asociate cu o integrală multiplă al cărei integrand este o funcție „necunoscută” de mai multe variabile; se utilizează numeroase concepte și rezultate din capitolul al doilea. Este discutată și problema suprafețelor minimale și a membranei vibrante.

CAPITOLUL 1

Preliminarii

Sunt recapitulate chestiuni de bază de topologie, algebră liniară și calcul diferențial și integral pe spații finit dimensionale (euclidiene): conceptele de spațiu topologic, mulțime deschisă, închisă, punct interior, punct aderent, funcție continuă, distanță, topologia canonică de spațiu metric, mulțime mărginită și mulțime compactă într-un spațiu metric, Teorema lui Weierstrass de mărginire a funcțiilor continue definite pe un compact sau Principiul contracției al lui Banach. Se rememorează chestiuni principale de algebră liniară: spațiu vectorial, subspațiu, varietate liniară, operator liniar între $\mathbb{K}$ -spații vectoriale, funcțională liniară definită pe un $\mathbb{K}$ -spațiu vectorial; se tratează și cazul special al operatorilor liniari pe spații vectoriale finit dimensionale, cărora li se atașează o matrice în baze fixate ale celor două spații (domeniu și codomeniu). Se reamintesc și lucruri esențiale privind continuitatea și diferențiabilitatea funcțiilor de mai multe variabile reale (în special privind derivatele parțiale și legătura cu diferențiabilitatea), enunțând apoi "Teorema de inversare locală" "Teorema funcțiilor implicite" pe cazul finit dimensional. În final sunt recapitulate succint fapte importante privind diverse tipuri de integrale ce se reîntâlnesc apoi pe parcursul lucrării: integrale cu parametru, integrale duble, triple sau de suprafață. Toate acestea pentru a da un caracter autoconținut lucrării.

Sursele bibliografice utilizate sunt [1], [2], [3], [4], [5].

1.1. Spații topologice și spații metrice

Se fixează X o mulțime nevidă.

DEFINIȚIA 1.1.1. (i). $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ se numește *topologie* pe X dacă și numai dacă:

(T₁). $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

(T₂). Reuniunea oricărei familii de mulțimi din $\mathcal{T}$ este o mulțime din $\mathcal{T}$.

(T₃). Intersecția oricărei familii finite de mulțimi din $\mathcal{T}$ este o mulțime din $\mathcal{T}$.

Dacă $\mathcal{T}$ este o topologie pe X , atunci $(X, \mathcal{T})$ se numește *spațiu topologic*, iar orice mulțime din $\mathcal{T}$ se numește *deschisă în raport cu topologia $\mathcal{T}$* sau *$\mathcal{T}$ -deschisă*.

(ii). Mulțimea $V \subset X$ se numește *$\mathcal{T}$ -vecinătate a lui a* dacă și numai dacă există $D \in \mathcal{T}$ astfel încât $a \in D \subset V$. Se va nota

$$\mathcal{V}(a) := \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(a) := \{V \subset X : V \text{ este } \mathcal{T}\text{-vecinătate a lui } a\}.$$

(iii). Familia $\mathcal{B}(a) \subset \mathcal{V}(a)$ se numește *sistem fundamental de vecinătăți ale lui a* dacă și numai dacă

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists B \in \mathcal{B}(a) : B \subset V.$$

(iv). Un spațiu topologic $(X, \mathcal{T})$ se numește *Hausdorff* (sau *separat*) dacă pentru oricare $x, y \in X$, $x \neq y$ există $V \in \mathcal{V}(x)$ și $U \in \mathcal{V}(y)$ cu $V \cap U = \emptyset$.

(v). Dacă $\mathcal{T}$ și $\mathcal{T}'$ sunt două topologii pe X , se spune că $\mathcal{T}$ este mai fină (strict mai fină) decât $\mathcal{T}'$ dacă $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ (sau $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}'$).

DEFINIȚIA 1.1.2. Se consideră $(X, \mathcal{T})$ spațiu topologic și $A \subset X$, $a \in X$.

(i). a se numește *punct interior mulțimii A* (sau *$\mathcal{T}$ -punct interior mulțimii A*) dacă și numai dacă există $D \in \mathcal{T}$ astfel încât $a \in D \subset A$. Mulțimea

$$\overset{\circ}{A} := \text{int}_{\mathcal{T}} A := \{x \in X : x \text{ punct interior lui } A\}$$

se numește *interiorul mulțimii A* (sau *$\mathcal{T}$ -interiorul mulțimii A*).

(ii). a se numește *punct de aderență* sau *$\mathcal{T}$ -punct de aderență* al mulțimii A dacă și numai dacă pentru oricare $V \in \mathcal{V}(a)$, $V \cap A \neq \emptyset$. Mulțimea

$$\overline{A} := \text{ad}_{\mathcal{T}} A := \{a \in X : a \text{ este punct de aderență al mulțimii } A\}$$

se numește *aderența (închiderea) lui A* sau *$\mathcal{T}$ -aderența (închiderea) mulțimii A* . Dacă $\overline{A} = X$, A se zice *densă în X* .

(iii). a se numește *punct de acumulare* sau *$\mathcal{T}$ -punct de acumulare* al mulțimii A dacă și numai dacă pentru oricare $V \in \mathcal{V}(a)$, $(V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$. Mulțimea

$$A' := \{a \in X : a \text{ este punct de acumulare al mulțimii } A\}$$

se numește *derivata lui A* sau *$\mathcal{T}$ -derivata mulțimii A* .

(iv). O submulțime F a spațiului topologic $(X, \mathcal{T})$ se numește *$\mathcal{T}$ -închisă* dacă și numai dacă $\overline{F} \in \mathcal{T}$.

OBSERVAȚIA 1.1.3. Dacă $A \subset X$ și $\mathcal{T}$ este topologie pe X , atunci:

(i). Au loc incluziunile

$$\overset{\circ}{A} = \cup \{D : D \in \mathcal{T} \text{ și } D \subset A\} \subset A \subset \overline{A} = \cap \{F : F \text{ este închisă și } F \supset A\};$$

(ii). $A \in \mathcal{T} \iff A = \overset{\circ}{A}$ și A închisă $\iff A = \overline{A}$.

DEFINIȚIA 1.1.4. Dacă $(X, \mathcal{T})$ și $(X', \mathcal{T}')$ sunt spații topologice, funcția $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ se numește *continuă în $a \in X$* dacă și numai dacă

$$\forall V' \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V \in \mathcal{V}(a) : \forall x \in V \Rightarrow f(x) \in V'.$$

$f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ se numește *funcție continuă de la X în X'* dacă și numai dacă f este continuă în orice punct din X .

OBSERVAȚIA 1.1.5. Dacă $\mathcal{B}(a) \subset \mathcal{V}(a)$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale lui a (relativ la $\mathcal{T}$), iar $\mathcal{B}(f(a)) \subset \mathcal{V}(f(a))$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale lui $f(a)$ (relativ la $\mathcal{T}'$), f este continuă în $a \iff$

$$\forall B' \in \mathcal{B}(f(a)), \exists B \in \mathcal{B}(a) : \forall x \in B \Rightarrow f(x) \in B'.$$

Are loc următoarea "caracterizare a continuității pe spații topologice":

PROPOZIȚIA 1.1.6. Pentru $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ următoarele afirmații sunt echivalente.

(i). f este continuă de la X în X' .

(ii). $\forall D' \in \mathcal{T}', \overset{-1}{f}(D') \in \mathcal{T}$.

DEFINIȚIA 1.1.7. (i). $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ se numește *distanță* (sau *metrică*) pe X dacă, pentru oricare x, y și z din X , sunt îndeplinite următoarele proprietăți:

(D₁). $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(D₂). $d(y, x) = d(x, y)$ (adică d este o funcție *simetrică*);

(D₃). $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (relația se numește *inegalitatea triunghiului*).

(ii). (X, d) se numește *spațiu metric*, dacă d este o distanță pe X .

(iii). Într-un spațiu metric (X, d) , pentru $a \in X$ și $r \in (0, \infty)$, se definește

$$B_d(a, r) := B_d(a, r) := \{x \in X : d(a, x) < r\},$$

numită *bila deschisă de centru a și rază r* .

(iv). Într-un spațiu metric (X, d) , pentru $a \in X$ și $A \subset X$, se definește

$$\text{dist}(a, A) := \inf \{d(a, x) \mid x \in A\},$$

distanța de la a la A .

Dacă nu este niciun pericol de confuzie, se omite indicele d .

EXEMPLUL 1.1.8. Pe $\mathbb{R}$ se consideră $d(x, y) = |x - y|$, pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$. Din proprietățile funcției modul se obține că d este distanță pe $\mathbb{R}$ (numită *distanța euclidiană pe $\mathbb{R}$*). Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $r \in (0, \infty)$, atunci

$$B(a, r) := B_d(a, r) = (a - r, a + r).$$

DEFINIȚIA 1.1.9. Fie (X, d) un spațiu metric. O submulțime U a lui X se numește *d -deschisă* (sau *deschisă în raport cu distanța d*), pe scurt (dacă nu este niciun pericol de confuzie) *deschisă* dacă are proprietatea

$$\forall a \in U, \exists r_a \in (0, \infty) \text{ astfel încât } B(a, r_a) \subset U.$$

Fie $\mathcal{T}_d$ familia tuturor submulțimilor deschise ale lui X .

OBSERVAȚIA 1.1.10. (i). $\mathcal{T}_d$ (definită mai sus) este o topologie pe X (se numește *topologia asociată canonic lui d*).

(ii). Orice spațiu metric este spațiu topologic Hausdorff.

DEFINIȚIA 1.1.11. Fie (X, d) spațiu metric.

(i). $A \subset X$ se numește *mărginită* $\iff \exists r > 0$ și $x \in X$ cu $A \subset B(x, r)$.

(ii). $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ se numește *acoperire a lui $Y \subset X$* dacă $Y \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. O

submulțime Y a lui X cu proprietatea că din orice acoperire deschisă a lui Y , există $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ cu proprietățile $\mathcal{A}_0$ este finită și rămâne acoperire pentru Y , se numește *compactă*. Dacă X compactă, atunci (X, d) se numește *spațiu metric compact*.

DEFINIȚIA 1.1.12. Fie (X, d) spațiu metric.

(i). $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset X$ se numește *șir convergent* dacă există $a \in X$, astfel încât, pentru oricare $\varepsilon \in (0, \infty)$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ cu

$$n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \implies d(x_n, a) < \varepsilon;$$

a se numește *limita șirului* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (deoarece, dacă ea există, este unică) și se notează $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(ii). $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset X$ se numește *Cauchy* dacă pentru oricare $\varepsilon \in (0, \infty)$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$ pentru oricare $n, p \in \mathbb{N}^*$ cu $n \geq n_\varepsilon$.

DEFINIȚIA 1.1.13. Un spațiu metric (X, d) în care orice șir Cauchy este convergent, se numește *spațiu metric complet*.

OBSERVAȚIA 1.1.14. Sunt cunoscute următoarele:

(i). Fie $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset X$ și $a \in X$. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci orice subșir al lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are limita a .

(ii). Dacă $A \subset X$ și $a \in X$, atunci

$$a \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset A, x_n \rightarrow a,$$

$$a \in A' \iff \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset A \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a.$$

(iii). Orice șir convergent de elemente din X este Cauchy; dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir Cauchy de elemente din X , atunci mulțimea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginită.

(iv). Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir Cauchy de elemente din X având proprietatea că admite un subșir convergent. Atunci $(x_n)_n$ este convergent (către limita subșirului).

OBSERVAȚIA 1.1.15. (i). Spațiul euclidian $\mathbb{R}$ este un spațiu metric complet (implicația "șir Cauchy $\implies$ șir convergent" se deduce din Lema lui Cesaro).

(ii). Deoarece în $\mathbb{R}^p$ convergența și proprietatea de șir Cauchy se "caracterizează pe componente", se obține completitudinea lui $\mathbb{R}^p$.

PROPOZIȚIA 1.1.16. Fie (X, d) , (Y, d') spații metrice și $f : X \rightarrow Y$. Atunci f este continuă $\iff$ pentru oricare $x \in X$ și oricare șir $(x_n)_n \subset X$, convergent la x , șirul $(f(x_n))_n \subset Y$ este convergent la $f(x)$.

Următoarea "Teoremă de mărginire a funcțiilor continue definite pe compacte" este extrem de utilă:

TEOREMA 1.1.17 (Weierstrass). Fie K o submulțime nevidă, compactă a spațiului (X, d) și $f : (K, d_K) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci există $x_m, x_M \in K$ astfel încât

$$f(x_m) = \inf\{f(x) : x \in K\}, f(x_M) = \sup\{f(x) : x \in K\}.$$

DEFINIȚIA 1.1.18. Se consideră (X, d) un spațiu metric. O funcție $f : X \rightarrow X$ pentru care există $q \in (0, 1)$ astfel încât, pentru oricare $x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$, se numește *contracție*. q se mai numește *factor de contracție*.

TEOREMA 1.1.19 (Principiul contracției). Se consideră (X, d) un spațiu metric complet și $f : X \rightarrow X$ o contracție. Atunci există și este unic un punct $a \in X$ astfel încât $f(a) = a$.

1.2. Spații vectoriale

1.2.1. Subspații vectoriale.

DEFINIȚIA 1.2.1. O mulțime E este *spațiu vectorial* peste $\mathbb{R}$ dacă sunt definite două operații, una *interioară* (adică între elementele lui E) notată *aditiv* "+" și una *exterioară* (adică între elementele lui E și numerele reale), notată *multiplicativ* ".", cu proprietățile:

- (1) $(E, +)$ formează un grup abelian;
- (2) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in E,$
- (3) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E,$
- (4) $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in E,$
- (5) $1 \cdot x = x, \forall x \in E.$

Se va nota cu $\mathbf{0}_E$ vectorul nul al spațiului (i.e. elementul neutru pentru "adunare").

EXEMPLUL 1.2.2. Mulțimea $\mathbb{R}^p$ este prin definiție *produsul cartezian* $\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{p \text{ ori}}$.

Pentru $x, y \in \mathbb{R}^p$, $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_p)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, fie

$$x + y \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p), \alpha \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_p).$$

Pentru ușurința scrierii se va scrie αx în loc de $\alpha \cdot x$.

Se verifică ușor că operațiile de mai sus organizează pe $\mathbb{R}^p$ ca spațiu vectorial.

OBSERVAȚIA 1.2.3. Se știe că dacă $\{E_i : i \in I\}$ este o familie nevidă de $\mathbb{R}$ -subspații vectoriale ale lui E , atunci $\bigcap_{i \in I} E_i$ este $\mathbb{R}$ -subspațiu vectorial al lui E .

Astfel, pentru $A \subset E$ nevidă,

$$\bigcap \{F : F \text{ este } \mathbb{R}\text{-subspațiu vectorial al lui } E \text{ și } A \subset F\} =: \text{sp}_{\mathbb{R}} A$$

este cel mai mic (în raport cu relația de incluziune) $\mathbb{R}$ -subspațiu vectorial al lui E care conține A .

DEFINIȚIA 1.2.4. Dacă $\emptyset \neq A \subset E$ atunci $\text{sp}_{\mathbb{R}} A$ se numește *acoperirea* $\mathbb{R}$ -liniară a lui A (sau $\mathbb{R}$ -subspațiul generat de A).

Este binecunoscut din algebra liniară rezultatul:

TEOREMA 1.2.5. Orice $\mathbb{R}$ -SV de dimensiune finită ($p := \dim_{\mathbb{R}} E$) este izomorf cu $\mathbb{R}^p$.

1.2.2. Varietăți liniare.

DEFINIȚIA 1.2.6. O mulțime $V \subset E$ se numește *varietate liniară (reală)* (sau *subspațiu afin (real)*) dacă și numai dacă pentru orice $x, y \in V$, $x \neq y$, $d_{x,y} \subset V$.

OBSERVAȚIA 1.2.7. (i). Evident $\emptyset$ este varietate liniară, E este varietate liniară în E , iar pentru orice $x, y \in E$, $x \neq y$, $d_{x,y}$ este varietate liniară în E .

(ii). Pentru orice $x \in E$, $\{x\}$ este varietate liniară în E .

(iii). Se poate deduce simplu că dacă V și V_1 sunt varietăți liniare în E , $a \in E$, și $\alpha \in \mathbb{K}$, atunci $a + V$, αV și $V + V_1$ sunt varietăți liniare în E .

(iv). Pentru $\emptyset \neq V \subset E$ următoarele afirmații sunt echivalente.

(a). $\exists a \in V : V - a$ este $\mathbb{R}$ -subspațiu vectorial în E .

(b). V este varietate liniară în E .

(c). $\forall a \in V, V - a$ este $\mathbb{R}$ -subspațiu vectorial.

Se poate deduce și că $F := V - a$ este singurul subspațiu vectorial real al lui E pentru care $V = F + a$.

DEFINIȚIA 1.2.8. (i). Fie $V \subset E$ o varietate liniară (reală). Din Observația 1.2.7(iv), $F := V - a$ (unde $a \in V$) este $\mathbb{R}$ -subspațiu vectorial al lui E și $V = F + a$; F este singurul subspațiu vectorial real al lui E pentru care $V = F + a$ (pentru oricare $a \in V$). $\dim_{\mathbb{R}}(V - a)$ se numește *dimensiunea afină* a lui V și se notează cu $\dim V$.

În contextul precedent V se numește varietate liniară *paralelă* cu F și pentru oricare $a, b \in E \setminus F$, $a \neq b$, $a + F$ și $b + F$ se numesc *varietăți liniare paralele*.

(ii). O varietate liniară H în E se numește *hiperplan (real)* în E dacă și numai dacă H este varietate liniară proprie și maximală în E .

1.2.3. Operatori liniari și funcționale liniare pe $\mathbb{K}$ -spații vectoriale. Se fixează E sau F $\mathbb{K}$ -spații vectoriale (pe scurt $\mathbb{K}$ -SV); $\mathbf{0}_E$ (respectiv $\mathbf{0}_F$) notează elementul nul al spațiilor E și F .

DEFINIȚIA 1.2.9. (i). Aplicația $L : E \rightarrow F$ se numește *operator $\mathbb{K}$ -liniar* dacă și numai dacă:

(L)₁. Pentru orice $x, y \in E$, $L(x + y) = Lx + Ly$ (adică L este *aditiv*).

(L)₂. Pentru orice $\alpha \in \mathbb{K}$, pentru oricare $x \in E$, $L(\alpha x) = \alpha Lx$ (adică L este $\mathbb{K}$ -*omogen*).

(ii). (a). Se consideră $\mathcal{L}(E, F) := \{L \in F^E : L \text{ este operator liniar}\}$, care este evident un $\mathbb{K}$ -sub SV în F^E (în raport cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire cu scalari a funcțiilor).

(b). $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) := E^*$ se numește *dualul algebric al lui E* . Elementele lui E^* se numesc *funcționale liniare* pe E ; E^* este evident un $\mathbb{K}$ -sub SV în $\mathbb{K}^E$ (în raport cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire cu scalari a funcțiilor).

(iii). Pentru oricare $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Se consideră:

(a). *Nucleul lui L* : $\mathcal{N}(L) := \ker(L) = \overset{-1}{L}(\{\mathbf{0}_F\}) = \{x \in E : Lx = \mathbf{0}_F\}$.

(b). *Imaginea lui L* : $\mathcal{R}(L) := L(E) = \{Lx : x \in E\}$.

(c). *Graficul lui L* : $\mathcal{G}(L) := \{(x, Lx) : x \in E\} \subset E \times F$.

OBSERVAȚIA 1.2.10. (i). Pentru $L \in \mathcal{L}(E, F)$, se poate verifica simplu că:

(a). $\mathcal{N}(L)$ este $\mathbb{K}$ -subspațiu vectorial al lui E .

(b). $\mathcal{R}(L)$ este $\mathbb{K}$ -subspațiu vectorial al lui F .

(c). $\mathcal{G}(L)$ este $\mathbb{K}$ -subspațiu vectorial al lui $E \times F$.

(ii). Mulțimea $\mathcal{L}(E, F)$ înzestrată cu operațiile uzuale de adunare a două funcții și de înmulțire dintre constante și funcții este $\mathbb{K}$ -SV.

(iii). $\mathbb{K}$ -SV $\mathcal{L}(E, E) := \mathcal{L}(E)$ înzestrat cu operația de compunere a două funcții este $\mathbb{K}$ -algebră în care I_E (operatorul identitate pe E) este unitate pentru compunerea operatorilor.

(iv). $\mathcal{G}(E) := \{L \in \mathcal{L}(E) : L \text{ este inversabil}\}$ este grup în raport cu operația de compunere.

1.2.4. Operatori liniari pe spații vectoriale finit dimensionale. Este binecunoscută din algebra liniară

TEOREMA 1.2.11. *Dacă E este un $\mathbb{K}$ -spațiu vectorial de dimensiune finită (dimensiunea sa fiind $n \in \mathbb{N}^*$), atunci E este izomorf cu $\mathbb{K}^n$.*

Fie E și F $\mathbb{K}$ -SV de dimensiune n și respectiv m ($n, m \in \mathbb{N}^*$). Fie

$$\mathcal{E} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}, \mathcal{F} := \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\},$$

baze în E , respectiv F . Fie $T \in \mathcal{L}(E, F)$ și se consideră

$$T(\mathbf{e}_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}), j = \overline{1, n},$$

în baza $\mathcal{F}$.

DEFINIȚIA 1.2.12. Matricea, notată A_T , ce are pe coloane coordonatele vectorilor $T(\mathbf{e}_j)$, $j = \overline{1, n}$ în baza $\mathcal{F}$, se numește *matricea operatorului T în bazele $\mathcal{E}$ și $\mathcal{F}$* . Deci

$$(1.2.1) \quad A_T := A_T(\mathcal{E}, \mathcal{F}) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

LEMA 1.2.13. Dacă $\mathcal{E}$ bază în E și $\mathcal{F}$ bază în F , iar $T \in \mathcal{L}(E, F)$, există și este unică matricea $A_T = A_T(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$(1.2.2) \quad T(\mathbf{x})_{\mathcal{F}} = A_T \mathbf{x}_{\mathcal{E}}, \forall \mathbf{x} \in E.$$

$\mathbf{x}_{\mathcal{E}}$ desemnează vectorul componentelor lui x în baza $\mathcal{E}$.

1.3. Continuitate și diferențiabilitate pentru funcții de mai multe variabile reale

Se va nota, pentru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}$.

DEFINIȚIA 1.3.1. (i). $V \subset \mathbb{R}^p$ se numește *vecinătate* a lui $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p \iff \exists \varepsilon > 0$, $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset V$, unde $B(\mathbf{x}, \varepsilon) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$ este bila de centru $\mathbf{a}$ și rază ε . Pentru $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$, se consideră

$$\mathcal{V}(\mathbf{a}) := \{V \subset \mathbb{R}^p \mid V \text{ vecinătate a lui } \mathbf{x}\}.$$

(ii). Fie $D \subset \mathbb{R}^p$. Atunci $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ se numește *punct de acumulare* pentru $D \iff (\forall V \in \mathcal{V}(\mathbf{a}))((V \setminus \{\mathbf{a}\}) \cap D \neq \emptyset)$. Se notează

$$D' := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p \mid \mathbf{a} \text{ punct de acumulare pentru } D\}.$$

OBSERVAȚIA 1.3.2. Dacă $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$, atunci

$$\mathbf{a} \in D' \iff (\forall \varepsilon > 0) \left((B(\mathbf{a}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{a}\}) \cap D \neq \emptyset \right).$$

În continuare, se vor considera funcții $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, $D \subseteq \mathbb{R}^p$,

$$f(x_1, \dots, x_p) = (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_q(x_1, \dots, x_p)).$$

DEFINIȚIA 1.3.3. Se consideră $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_q) \in \mathbb{R}^q$ și $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in D'$. Se spune că f are limita $\mathbf{l}$ în punctul $\mathbf{a} \iff$

$$\iff (\forall V \in \mathcal{V}(\mathbf{l}))(\exists U \in \mathcal{V}(\mathbf{a}))(\forall \mathbf{x} \in (U \setminus \{\mathbf{a}\}) \cap D)(f(\mathbf{x}) \in V).$$

$\mathbf{l}$ este unică cu proprietatea de mai sus. Se scrie $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$.

PROPOZIȚIA 1.3.4. Fie $\mathbf{a} \in D'$, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_p) \in \mathbb{R}^p$, atunci: $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \iff$

$$\left(\begin{array}{l} (\mathbf{x}^n := (x_1^n, x_2^n, \dots, x_p^n))_{n \geq 1} \subset D \setminus \{\mathbf{a}\} \\ x_1^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} a_1, x_2^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} a_2, \dots, x_p^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} a_p \end{array} \right) \Rightarrow f_j(\mathbf{x}^n) \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} l_j, j = \overline{1, p}$$

$$\iff (\forall j = \overline{1, q}) \left(\text{există } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_j(\mathbf{x}) \text{ și } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_j(\mathbf{x}) = l_j \right).$$

DEFINIȚIA 1.3.5. Se spune că f este continuă în punctul $\mathbf{a} \in D \iff$

$$\iff (\forall V \in \mathcal{V}(f(\mathbf{a}))) (\exists U \in \mathcal{V}(\mathbf{a})) (\forall \mathbf{x} \in U \cap D) (f(\mathbf{x}) \in V).$$

PROPOZIȚIA 1.3.6. f continuă în $\mathbf{a} \iff$

$$\left(\begin{array}{l} (\mathbf{x}^n := (x_1^n, x_2^n, \dots, x_p^n))_{n \geq 1} \subset D \\ x_1^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} a_1, x_2^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} a_2, \dots, x_p^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} a_p \end{array} \right) \Rightarrow f_j(\mathbf{x}^n) \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} f_j(\mathbf{a}), j = \overline{1, q}$$

$$\iff (\forall j = \overline{1, q}) (f_j \text{ continuă în } \mathbf{a}).$$

PROPOZIȚIA 1.3.7. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $E \subseteq \mathbb{R}^q$, $u : D \rightarrow E$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^s$ și $\mathbf{a} \in D$, $\mathbf{b} := u(\mathbf{a}) \in E$. Dacă u este continuă în $\mathbf{a}$ (pe D) iar f este continuă în $\mathbf{b}$ (pe E), atunci $f \circ u$ este continuă în $\mathbf{a}$ (pe D).

DEFINIȚIA 1.3.8. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$, deschisă, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p) \in D$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$ versor. Atunci f este derivabilă după direcția lui $\mathbf{u}$ în $\mathbf{a} \Leftrightarrow$ următoarea limită există în $\mathbb{R}^q$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

Limita de mai sus se va nota $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a})$ și se va numi *derivata lui f după direcția lui $\mathbf{u}$ în $\mathbf{a}$* . Se deduce că f este derivabilă după direcția lui $\mathbf{u}$ în $\mathbf{a} \Leftrightarrow f_j$ sunt derivabile după direcția lui $\mathbf{u}$ în $\mathbf{a}$, $\forall j = \overline{1, q}$ și

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f_q}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) \right).$$

OBSERVAȚIA 1.3.9. Dacă $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$, $i = \overline{1, p}$ (versorii bazei canonice), se obțin *derivatele parțiale ale lui f în $\mathbf{a}$ în raport cu x_i* :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_i}(\mathbf{a}) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_p)}{x_i - a_i} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Se deduce că f este derivabilă parțial în raport cu x_i în $\mathbf{a} \Leftrightarrow f_j$ sunt derivabile parțial în raport cu x_i în $\mathbf{a}$, $\forall j = \overline{1, q}$ și

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right).$$

DEFINIȚIA 1.3.10. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$, deschisă, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p) \in D$. Atunci f se numește *derivabilă (diferențiabilă) în $\mathbf{a}$* $\Leftrightarrow$

$$(\exists T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q \text{ liniară}) \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - T(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^q \right).$$

Se deduce simplu că aplicația T cu proprietatea de mai sus este unică și se va numi *derivata (diferențiala) lui f în $\mathbf{a}$* ($T =: df(\mathbf{a})$ sau $f'(\mathbf{a})$ sau $Df(\mathbf{a})$).

Se deduce că f este diferențiabilă în $\mathbf{a} \Leftrightarrow f_j$ sunt diferențiabile în $\mathbf{a}$, $\forall j = \overline{1, q}$ și

$$df(\mathbf{a}) = (df_1(\mathbf{a}), \dots, df_q(\mathbf{a})),$$

sau cu cealaltă notație

$$f'(\mathbf{a}) = (f'_1(\mathbf{a}), \dots, f'_q(\mathbf{a})).$$

TEOREMA 1.3.11. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ deschisă și $\mathbf{a} \in D$. Dacă f este diferențiabilă în $\mathbf{a}$, iar $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ versor, atunci există $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a})$ și $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a})(\mathbf{u})$. În particular, $\forall i = \overline{1, p}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a})(\mathbf{e}_i) = f'(\mathbf{a})(\mathbf{e}_i).$$

COROLARUL 1.3.12. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ deschisă și $\mathbf{a} \in D$. Dacă f este diferențiabilă în $\mathbf{a}$, atunci rezultă că $\forall \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) v_i,$$

sau, dacă se notează cu dx_i aplicațiile proiecție pe axe, se obține

$$df(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) dx_i.$$

DEFINIȚIA 1.3.13. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ deschisă și $\mathbf{a} \in D$. Dacă f este diferențiabilă în $\mathbf{a}$, atunci se va nota

$$J_f(\mathbf{a}) := \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right)_{j=\overline{1,q}, i=\overline{1,p}}.$$

$J_f(\mathbf{a})$ se va numi *Jacobiana lui f în $\mathbf{a}$* .

OBSERVAȚIA 1.3.14. $J_f(\mathbf{a})$ este matricea asociată diferențialei $df(\mathbf{a})$ (sau $f'(\mathbf{a})$) în bazele canonice ale lui $\mathbb{R}^p$ și $\mathbb{R}^q$. Rezultă că $\forall \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$df(\mathbf{a})(v_1, \dots, v_p) = J_f(\mathbf{a}) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_p \end{pmatrix}.$$

Au loc următoarele "Criterii de diferențiabilitate":

PROPOZIȚIA 1.3.15. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ deschisă și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este diferențiabilă în $\mathbf{a} \in D \Leftrightarrow$

(i). există derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$;

(ii). $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^q$.

PROPOZIȚIA 1.3.16. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ deschisă și $\mathbf{a} \in D$. Dacă există derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,p}$ pe o vecinătate a lui $\mathbf{a}$ (pe D) și sunt continue în $\mathbf{a}$ (pe D), atunci f diferențiabilă în $\mathbf{a}$ (pe D).

Au loc următoarele relații pentru expresia diferențialei și a derivatelor parțiale de funcții compuse:

PROPOZIȚIA 1.3.17. Fie $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow F \subset \mathbb{R}^q$, E, F deschise, $g : F \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$. Se va nota variabila funcției f cu $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ iar variabila funcției g cu $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_q)$. Funcția compusă $h = g \circ f$ are forma

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= g(f(\mathbf{x})) = g(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_q(\mathbf{x})) = \\ &= g(f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_q(x_1, \dots, x_p)). \end{aligned}$$

Atunci, dacă f diferențiabilă (derivabilă) în $\mathbf{x}$, iar g în $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, atunci $g \circ f$ diferențiabilă (derivabilă) în $\mathbf{x}$ și $d(g \circ f)(\mathbf{x}) = dg(f(\mathbf{x})) \circ df(\mathbf{x})$, adică

$$J_{g \circ f}(\mathbf{x}) = J_g(f(\mathbf{x})) \cdot J_f(\mathbf{x}),$$

sau

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(\mathbf{x})) \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_l}(f(\mathbf{x})) \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \dots + \\ &+ \frac{\partial g}{\partial y_q}(f(\mathbf{x})) \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \quad i \in \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Se va mai scrie, în context abstract,

$$(g \circ f)'(\mathbf{x}) = g'(f(\mathbf{x})) \circ f'(\mathbf{x}),$$

sau

$$D(g \circ f)(\mathbf{x}) = Dg(f(\mathbf{x})) \circ Df(\mathbf{x}).$$

DEFINIȚIA 1.3.18. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ deschisă și $\mathbf{a} \in D$. Se presupune că pe o vecinătate V a lui $\mathbf{a}$ există derivata parțială în raport cu una din variabile, x_i . Dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admite derivata parțială în raport cu variabila x_j în punctul $\mathbf{a}$, $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\mathbf{a})$,

aceasta se notează $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$ și se numește *derivata parțială de ordin doi în raport cu x_i și x_j a funcției f în punctul $\mathbf{a}$* . Se spune că f admite *derivată parțială de ordin doi în raport cu x_i și x_j în $\mathbf{a}$* . Dacă $i = j$, atunci derivata de mai sus se notează $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{a})$ și se numește *derivata de ordin doi în raport cu x_i a funcției f în $\mathbf{a}$* . Pentru $q = 1$ se va nota

$$H_f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) \right)_{i,j=1,p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

și se va numi *Hessiana lui f în $\mathbf{a}$* .

Dacă derivatele parțiale de ordin doi există în fiecare punct din D se spune că f admite *derivate parțiale de ordin doi pe D* .

TEOREMA 1.3.19 (Fermat). Fie $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ (D deschisă) o funcție care admite derivate parțiale de ordinul întâi în raport cu toate variabilele într-un punct $\mathbf{a} \in D$. Dacă $\mathbf{a}$ este punct de extrem local, atunci

$$(\nabla f)(\mathbf{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathbf{a}) \right) = \mathbf{0},$$

i.e. $\mathbf{a}$ este punct critic pentru f .

TEOREMA 1.3.20. Fie $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ (D deschisă) o funcție de clasă C^2 pe D (cu derivate parțiale de ordin doi continue pe D) și $\mathbf{a} \in D$ un punct critic.

(i). Dacă $H_f(\mathbf{a})$ este pozitiv definită, atunci $\mathbf{a}$ este punct de minim local pentru f .

(ii). Dacă $H_f(\mathbf{a})$ este negativ definită, atunci $\mathbf{a}$ este punct de maxim local pentru f .

(iii). Dacă în plus f este de clasă C^3 și $H_f(\mathbf{a})$ este nedefinită, atunci $\mathbf{a}$ nu este punct de extrem local pentru f .

OBSERVAȚIA 1.3.21. "Teorema lui Fermat" afirmă că punctele de extrem sunt critice, iar Teorema 1.3.20 dă "condiții suficiente de extrem" pentru un punct critic.

PROPOZIȚIA 1.3.22 (Sylvester). Fie $A = (a_{ji})_{j,i=1,p}$ o matrice simetrică de tip $n \times n$. Sunt adevărate echivalențele:

(i). A este pozitiv definită $\Leftrightarrow$ toți minorii diagonali $\Delta_1 = a_{11}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_p = \det A, \text{ sunt strict pozitivi.}$$

(ii). A este negativ definită $\Leftrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_p > 0$.

DEFINIȚIA 1.3.23. (i). Se numește *segment de extremități $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{x}_2$, în $\mathbb{R}^p$* mulțimea de puncte $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p \mid \mathbf{x} = (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2, t \in [0, 1]\}$.

(ii). $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ se numește *convexă* dacă oricare ar fi două puncte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ din Ω , segmentul de extremități $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{x}_2$ este inclus în Ω .

TEOREMA 1.3.24 (Formula lui Taylor cu rest Lagrange). *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție de $n+1$ ori derivabilă, unde D este o mulțime convexă, deschisă. Atunci oricare ar fi $\mathbf{x}$ și $\mathbf{a}$ în D există un punct $\mathbf{c}$ pe segmentul de extremități $\mathbf{a}$ și $\mathbf{x}$ astfel încât*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & f(\mathbf{a}) + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{i_1, i_2=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(\mathbf{a})(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) + \\ & + \dots + \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^p \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(\mathbf{a})(x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_n} - a_{i_n}) + \\ & + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{n+1}=1}^p \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{n+1}}}(\mathbf{c})(x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_{n+1}} - a_{i_{n+1}}). \end{aligned}$$

1.4. Teorema de inversare locală și teorema funcțiilor implicite - cazul finit dimensional

TEOREMA 1.4.1 (Teorema de inversare locală - cazul finit dimensional). *Fie $G \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $\mathbf{a} \in G$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, cu f derivabilă pe G , f' continuă în $\mathbf{a}$ și se presupune că $\exists (f'(\mathbf{a}))^{-1}$. Atunci $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ deschisă și $\exists V \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, cu $\mathbf{a} \in U$ astfel încât :*

- $f : U \rightarrow V$ bijecție;
- f^{-1} derivabilă pe V ;
- (f^{-1}) continuă și $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$.

OBSERVAȚIA 1.4.2. Fie $F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^p$ unde $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^p$ deschise. Deci

$$F = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in U \subset \mathbb{R}^k, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p) \in V \subset \mathbb{R}^p.$$

Se va nota cu $D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(x, y)$, $F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, sau cu $J_{F, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ matricea derivatelor parțiale ale lui $F_1, \dots, F_p$ în raport cu $y_1, \dots, y_p$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_p} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial y_1} & \frac{\partial F_p}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{pmatrix},$$

calculate în $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Evident $J_{F, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Se va nota

$$\det J_{F, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =: \frac{\partial(F_1, \dots, F_p)}{\partial(y_1, \dots, y_p)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Analog, se va nota $D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, sau $F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, sau cu $J_{F, \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ matricea derivatelor parțiale ale componentelor $F_1, \dots, F_p$ în raport cu $x_1, \dots$,

x_k :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_1} & \frac{\partial F_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_p}{\partial x_k} \end{pmatrix},$$

calculate în $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Evident $J_{F,\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$.

Se vor nota tot cu $D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, etc. și aplicațiile liniare corespunzătoare (așanumite "diferențiale parțiale").

TEOREMA 1.4.3 (Teorema funcțiilor implicite - cazul finit dimensional). *Fie $F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^p$, unde $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^p$ deschise. Presupunem că F este de clasă C^1 pe $U \times V$. Fie $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in U \times V$ pentru care:*

- (1) $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$;
- (2) matricea $J_{F,\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ este inversabilă.

Atunci:

- (a) $\exists U_1 \subset U$, $U_1 \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$, $\exists V_1 \subset V$, $V_1 \in \mathcal{V}(\mathbf{y}_0)$;
- (b) $\exists ! f : U_1 \rightarrow V_1$ astfel încât $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ și $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$, $\forall \mathbf{x} \in U_1$.

Mai mult, f este de clasă C^1 și

$$J_f(\mathbf{x}) = -J_{F,\mathbf{y}}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))^{-1} \cdot J_{F,\mathbf{x}}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})).$$

1.5. Diverse integrale

1.5.1. Integrale cu parametru. I. Fie $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ și $J \subset \mathbb{R}$ un interval arbitrar și fie $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$.

DEFINIȚIA 1.5.1. Dacă funcția parțială a lui f în raport cu x ($x \in [a, b]$) este integrabilă pe $[a, b]$, pentru oricare $t \in J$, atunci are sens să se considere

$$F : J \rightarrow \mathbb{R}, F(t) = \int_a^b f(x, t) dx, t \in J.$$

Are loc

PROPOZIȚIA 1.5.2. *Fie $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă ($I = [a, b]$, $J = [c, d]$). Se presupune că derivata $\frac{\partial f}{\partial t}$ există și este continuă în $I \times J$. În aceste condiții, funcția $F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ este derivabilă pe J și derivata este dată de:*

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx, t \in J.$$

În plus $F'(t)$ este continuă pe J .

II. Se consideră situația în care parametrul apare atât în expresia funcției care se integrează cât și la limitele și condițiile de derivabilitate.

DEFINIȚIA 1.5.3. Fie $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ ($I = [a, b]$, $J = [c, d]$). Presupunem că funcțiile parțiale ale lui f în raport cu x sunt integrabile pe $[a, b]$. Fie a și b două funcții definite pe J și cu valori în I . În aceste condiții, integrala

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

are sens pentru orice $t \in J$.

Are loc o propoziție similară lui 1.5.2.

TEOREMA 1.5.4. Fie $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ continuă ($I = [a, b], J = [c, d]$), iar a și b două funcții derivabile pe J cu valori în I . Presupunem că f admite, pe $I \times J$, derivată parțială în raport cu t continuă, în aceste condiții, funcția

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

este derivabilă pe J și

$$F'(t_0) = \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx + f(b(t_0), t_0) \cdot b'(t_0) - f(a(t_0), t_0) \cdot a'(t_0),$$

pentru $t_0 \in J$.

1.5.2. Integrale duble. Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ domeniu plan compact (i.e. închis și mărginit), măsurabil Jordan și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, se poate defini conceptul de *integrabilitate Riemann bidimensională* (a lui f pe D) analog cazului unidimensional (cu diviziuni, sisteme de puncte intermediare, sume Riemann).

DEFINIȚIA 1.5.5. Dacă se împarte D în subdomenii compacte, măsurabile Jordan ΔD_i , de arii ΔA_i , $i = 1, \dots, n$ (familia $\{\Delta D_i\}_{i=1, n}$ se numește *diviziune a lui D*), și se consideră $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta D_i$, $i = 1, \dots, n$ (familia $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1, n}$ se numește *sistem de puncte intermediare asociat diviziunii* $\{\Delta D_i\}_{i=1, n}$) se poate defini suma

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i,$$

numită *suma Riemann asociată funcției f , diviziunii $\{\Delta D_i\}_{i=1, n}$ și sistemului de puncte intermediare $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1, n}$* .

Se consideră limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i,$$

unde limita este luată după $n \rightarrow \infty$ astfel încât diametrul subdomeniilor ΔD_i tinde la zero ($||\Delta D_i|| \rightarrow 0$). Dacă limita există pentru orice șir de diviziuni ca mai sus și orice șir de sisteme de puncte intermediare asociat diviziunilor și este mereu aceeași, ea se notează cu

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

se numește *integrala dublă a lui f pe D* , iar funcția f se numește *integrabilă Riemann bidimensional pe D* .

TEOREMA 1.5.6. Orice funcție continuă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^2$ domeniu plan compact, măsurabil Jordan) este integrabilă Riemann bidimensional pe D .

TEOREMA 1.5.7 (Fubini). Fie $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue, $\varphi \leq \psi$,

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continuă. Atunci f este Riemann integrabilă pe D și

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

1.5.3. Integrale triple. Dacă $K \subset \mathbb{R}^3$ domeniu compact, măsurabil Jordan și $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, se poate defini conceptul de *integrabilitate Riemann tridimensională* (a lui f pe K) analog cazurilor unii și bidimensional.

DEFINIȚIA 1.5.8. Dacă se împarte K în subdomenii compacte, măsurabile Jordan ΔK_i , de volume ΔV_i , $i = 1, \dots, n$ (familia $\{\Delta K_i\}_{i=1, n}$ se numește *diviziune a lui K*), și se consideră $(\xi_i, \eta_i, \mu_i) \in \Delta K_i$, $i = 1, \dots, n$ (familia $\{(\xi_i, \eta_i, \mu_i)\}_{i=1, n}$ se numește *sistem de puncte intermediare asociat diviziunii* $\{\Delta K_i\}_{i=1, n}$) se poate defini suma

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \mu_i) \Delta V_i,$$

numită *suma Riemann asociată funcției f , diviziunii $\{\Delta K_i\}_{i=1, n}$ și sistemului de puncte intermediare $\{(\xi_i, \eta_i, \mu_i)\}_{i=1, n}$* .

Se consideră limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \mu_i) \Delta V_i,$$

unde limita este luată după $n \rightarrow \infty$ astfel încât diametrul subdomeniilor ΔK_i tinde la zero ($\|\Delta K_i\| \rightarrow 0$). Dacă limita există pentru orice șir de diviziuni ca mai sus și orice șir de sisteme de puncte intermediare asociate diviziunilor și este mereu aceeași, ea se notează cu

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz,$$

se numește *integrala triplă a lui f pe K* , iar funcția f se numește *integrabilă Riemann tridimensional pe K* .

TEOREMA 1.5.9. Orice funcție continuă $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ($K \subset \mathbb{R}^3$ domeniu plan compact, măsurabil Jordan) este integrabilă Riemann tridimensional pe K .

TEOREMA 1.5.10 (Fubini). Fie $\varphi, \psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue, $\varphi \leq \psi$ ($D \subset \mathbb{R}^2$ compact, măsurabil Jordan),

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

și $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continuă. Atunci f este Riemann integrabilă pe K și

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

1.5.4. Integrale de suprafață.

DEFINIȚIA 1.5.11. O *pânză* poate fi dată sub forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(u, v),$$

u, v parametri reali, sau deoarece în coordonate carteziane

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

mai precis

$$(1.5.1) \quad S : \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}, (u, v) \in D,$$

($D \subset \mathbb{R}^2$ compact, măsurabil Jordan), $\varphi, \psi, \chi \in C^1(D)$.

OBSERVAȚIA 1.5.12. Se poate defini conceptul de pânze echivalente, se poate deduce că două pânze echivalente au aceeași imagine. Se deduce simplu că relația de echivalență a pânzelor este o relație de echivalență pe mulțimea tuturor pânzelor, clasele de echivalență numindu-se *suprafețe*. Se va folosi, prin abuz, cuvântul suprafață și pentru pânză.

Curbele parametrice $u = \text{constant}$, $v = \text{constant}$ stabilesc un sistem de coordonate pe suprafață. Elementul fundamental pentru definirea integralei de suprafață este *elementul (diferențial) de arie* $d\sigma$ (în plan, la integrale duble, acesta era $dA = dxdy$).

În fiecare punct P al suprafeței $d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv$ generează planul tangent la suprafață. În particular direcțiile curbelor parametrice $u = \text{constant}$, $v = \text{constant}$ sunt date de $d\mathbf{x}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du$, $d\mathbf{x}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv$.

Produsul vectorial $d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dudv$ este normal planului tangent în P , iar mărimea sa $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$ este chiar aria paralelogramului (diferențial) de coordonate. Aceasta impune

DEFINIȚIA 1.5.13. (i). *Elementul (diferențial) de arie* $d\sigma$ al unei suprafețe date ca mai sus este

$$d\sigma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv.$$

(ii). Pentru $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continuă, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, S o suprafață de clasă C^1 dată ca mai sus cu $\text{Im} S \subset \Omega$, se definește *integrala de suprafață de prima speță a lui F pe S* ca fiind

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv.$$

OBSERVAȚIA 1.5.14. (i). Dacă suprafața este dată sub formă explicită $z = f(x, y)$, mai precis

$$S : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}, (u, v) \in D,$$

($D \subset \mathbb{R}^2$ compact, măsurabil Jordan), $f \in C^1(D)$, atunci

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{k} - \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{j} - \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{i},$$

de unde

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2},$$

deci

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(u, v, f(u, v)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2} du dv.$$

(ii). Dacă suprafața este dată sub formă implicită $G(x, y, z) = 0$, se știe că în fiecare punct al său câmpul gradient ∇G este perpendicular pe planul tangent la suprafață, deci și la suprafață; așadar

$$\frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \pm \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}.$$

TEOREMA 1.5.15. Dacă suprafața S este dată prin

$$S : \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in D,$$

($D \subset \mathbb{R}^2$ compact, măsurabil Jordan), $\varphi, \psi, \chi \in C^1(D)$, iar $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continuă, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cu $\text{Im} S \subset \Omega$, atunci

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

unde E, F, G sunt coeficienții primei forme fundamentale ai lui S :

$$E = (\varphi'_u)^2 + (\psi'_u)^2 + (\chi'_u)^2, \quad G = (\varphi'_v)^2 + (\psi'_v)^2 + (\chi'_v)^2, \\ F = \varphi'_u \cdot \varphi'_v + \psi'_u \cdot \psi'_v + \chi'_u \cdot \chi'_v.$$

DEFINIȚIA 1.5.16. Pentru $P, Q, R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ deschisă,

$$S : \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in D,$$

($D \subset \mathbb{R}^2$ compact, măsurabil Jordan) o suprafață cu două fețe, de clasă C^1 cu $\text{Im} S \subset \Omega$, se definește integrala de suprafață de a doua speță a lui $\mathbf{V} = (P, Q, R)$ pe S^+ ca fiind

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ = \iint_S \mathbf{V}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) d\sigma, \end{aligned}$$

unde S^+ este fața exterioară a suprafeței S , iar $\mathbf{n}$ este câmpul versorilor normali la fața exterioară a suprafeței S ($\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ desemnează produsul scalar al lui $\mathbf{V}$ cu $\mathbf{n}$).

CAPITOLUL 2

Complemente de analiză pe varietăți

Se definește conceptul de varietate $(n-1)$ -dimensională în $\mathbb{R}^n$; se deduce că, în fiecare dintre punctele sale, M are un plan tangent $(n-1)$ -dimensional. Se discută „metoda multiplicatorului Lagrange”, care afirmă că: pentru a maximiza sau a minimiza funcția $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ supusă „constrângerii” $g(x_1, \dots, x_n) = 0$, este suficient a rezolva ecuațiile scalare $g(\mathbf{x}) = 0$, $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$, pentru $n+1$ „necunoscute” $x_1, \dots, x_n, \lambda$; dacă aceste ecuații au mai multe soluții, putem determina care (dacă există) dă un maxim și care dă un minim, calculând valoarea lui f în fiecare.

Se definește conceptul de varietate k -dimensională în $\mathbb{R}^n$; se deduce că, dacă M este o varietate k -dimensională în $\mathbb{R}^n$, atunci, în fiecare dintre punctele sale, M are un plan tangent k -dimensional. Se deduce o generalizare a "Teoremei funcțiilor implicite". Din ea se deduce faptul că soluția a m ecuații în $n > m$ variabile este, în general, o varietate $(n-m)$ -dimensională în $\mathbb{R}^n$, ceea ce conduce la o generalizare a "metodei multiplicatorului Lagrange", numită "metoda multiplicatorilor Lagrange".

Se definește conceptul de petic (patch) neted (sau de clasă C^1); varietatea k -dimensională în $\mathbb{R}^n$ M se va numi netedă (sau de clasă C^1) dacă este o reuniune de petice netede; se deduce că o submulțime M a lui $\mathbb{R}^n$ este o k -varietate netedă dacă este, local, imaginea unei aplicații de clasă C^1 obișnuite, definită pe o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^k$. Pentru o varietate k -dimensională în $\mathbb{R}^n$ netedă se definesc conceptele de pachet de coordonate și de atlas, dar și ce înseamnă că ea este orientabilă. Se definesc apoi noțiunile de k -celulă orientată și de regiune celulată orientată într-o k -varietate netedă $M \subset \mathbb{R}^n$. În final se definește conceptul de k -varietate-cu-bord netedă orientată compactă, ca fiind o regiune compactă V într-o k -varietate orientată $M \subset \mathbb{R}^n$, astfel încât frontiera sa ∂V este o $(k-1)$ -varietate netedă (compactă). O formă k -diferențială α pe o mulțime $U \subset \mathbb{R}^n$ este o aplicație care asociază în fiecare punct $\mathbf{x} \in U$ o funcție k -multiliniară alternată $\alpha(\mathbf{x}) = \alpha_{\mathbf{x}}$ pe $\mathbb{R}^n$; pentru o astfel de formă de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^n$ și pentru $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ o suprafață k -dimensională de clasă C^1 se poate vorbi despre integrala lui α pe φ . Se enunță (fără demonstrație) Teorema lui Stokes referitoare la integrala unei $(k-1)$ -forme diferențiale de clasă C^1 care este definită pe o submulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$ care conține o k -celulă orientată, respectiv o regiune celulată orientată, respectiv o k -varietate-cu-bord netedă orientată compactă într-o k -varietate orientată $M \subset \mathbb{R}^n$. În final, se definește ce înseamnă un "patch" (petic) de suprafață k -dimensională în $\mathbb{R}^n$, precum și aria sa.

Toate din conceptele și rezultatele din acest capitol sunt necesare în ultimul capitol, pentru a da un caracter autoconținut lucrării. Multe propoziții sau teoreme sunt doar enunțate, deducerea lor fiind prea laborioasă și necesitând cunoștințe suplimentare avansate de analiză pe varietăți.

Sursele bibliografice utilizate sunt [1], [2].

2.1. Multiplicatori Lagrange

OBSERVAȚIA 2.1.1. Fie D o submulțime compactă (adică închisă și mărginită) a lui $\mathbb{R}^n$. Dacă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă atunci, prin Teorema lui Weierstrass, există un punct $\mathbf{p} \in D$ la care f își atinge maximul (absolut) valoarea pe D (și în mod similar f atinge o valoare minimă absolută pe D). Punctul $\mathbf{p}$ poate fi fie un punct frontieră, fie un punct interior al lui D . $\mathbf{p}$ este un punct de frontieră al lui D dacă și numai dacă fiecare bilă deschisă centrată pe $\mathbf{p}$ conține atât puncte de D , cât și puncte de $\mathbb{R}^n \setminus D$; un punct interior de D este un punct de D care nu este un punct frontieră. Astfel $\mathbf{p}$ este un punct interior al lui D dacă și numai dacă D conține o bilă deschisă centrată în $\mathbf{p}$. Mulțimea tuturor punctelor frontieră (interioare) ale lui D se numește *frontiera (interiorul) lui D* .

De exemplu, bila deschisă $B_r(\mathbf{p})$ este interiorul bilei închise $\bar{B}_r(\mathbf{p})$; sfera $S_r(\mathbf{p}) = \bar{B}_r(\mathbf{p}) \setminus B_r(\mathbf{p})$ este frontiera sa.

DEFINIȚIA 2.1.2. Fie D o submulțime compactă (adică închisă și mărginită) a lui $\mathbb{R}^n$. Spunem că funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ are un *maxim local* (respectiv, *minim local*) pe D în punctul $\mathbf{p} \in D$ dacă și numai dacă există o bilă deschisă B centrată în $\mathbf{p}$ astfel încât $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{p})$ [respectiv, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{p})$] pentru toate punctele $\mathbf{x} \in B \cap D$. Astfel, f are un maxim local pe D în punctul $\mathbf{p}$ dacă valoarea sa în $\mathbf{p}$ este cel puțin la fel de mare ca în orice punct „în apropierea” sa, din D .

În problemele de maxim-minim aplicate, mulțimea D este adesea mulțimea de puncte de pe sau în interiorul unei suprafețe $n - 1$ dimensionale închise și mărginite S în $\mathbb{R}^n$; S este atunci frontiera lui D . Se va vedea că, dacă funcția diferențiabilă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ are un maxim sau un minim local în punctul interior $\mathbf{p} \in D$, atunci $\mathbf{p}$ trebuie să fie un *punct critic al lui f* , adică un punct în care toate derivatele parțiale de ordin 1 ale lui f se anulează, deci $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Punctele critice ale lui f pot fi găsite (în principiu) prin „setarea derivatelor parțiale ale lui f toate egale cu zero și determinând pe $x_1, \dots, x_n$ ”. Determinarea punctelor critice în cazul multidimensional nu diferă esențial de aflarea lor în cazul bidimensional deja discutat (recapitulat).

Dacă, totuși, $\mathbf{p}$ este un punct frontieră al lui D în care f are un maxim sau un minim local pe D , atunci situația este destul de diferită - localizarea acestor puncte este o problemă de tip "multiplicatori Lagrange". Metodele de studiu se bazează pe următorul rezultat.

TEOREMA 2.1.3. Fie S o mulțime în $\mathbb{R}^n$ și $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S$ o curbă diferențiabilă cu $\varphi(0) = \mathbf{a}$. Dacă f este o funcție diferențiabilă cu valori reale definită pe o mulțime deschisă care conține S și f are un maxim local (sau un minim local) pe S în $\mathbf{a}$, atunci gradientul vectorul $\nabla f(\mathbf{a})$ este ortogonal pe vectorul viteză $\varphi'(0)$.

COROLARUL 2.1.4. Dacă U este o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ și $\mathbf{a} \in U$ este un punct în care funcția diferențiabilă $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ are un maxim local sau un minim local, atunci $\mathbf{a}$ este un punct critic al lui f , i.e. $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

2.2. Varietăți

Se va defini ce este o suprafață $(n - 1)$ -dimensională. Pentru început, dorim ca o suprafață $(n - 1)$ -dimensională (numită $(n - 1)$ -varietate în definiția de mai jos) să fie o mulțime în $\mathbb{R}^n$ care are în fiecare punct un plan tangent $(n - 1)$ -dimensional.

DEFINIȚIA 2.2.1. (i). Multimea M din $\mathbb{R}^n$ se spune că *are un plan tangent k -dimensional în punctul $\mathbf{a} \in M$* dacă reuniunea tuturor dreptelor tangente în $\mathbf{a}$, la curbele diferentiabile cu imaginea în M care trec prin $\mathbf{a}$, este un plan k -dimensional (adică este o translație a unui subspațiu k -dimensional al $\mathbb{R}^n$).

(ii). O varietate va fi definită ca o uniune de mulțimi numite „patch-uri” („petic”). Fie $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ aplicația proiecție care „șterge coordonata a i -a”, adică,

$$\pi_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n),$$

unde simbolul $\hat{x}_i$ înseamnă că coordonata x_i a fost ștearsă din n -tuplu, lăsând un $(n-1)$ -tuplu sau punct din $\mathbb{R}^{n-1}$. Multimea P din $\mathbb{R}^n$ se numește „*patch*” (*petic*) $(n-1)$ -dimensional dacă și numai dacă există $i \leq n$ și există o funcție diferentiabilă $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, definită pe o submulțime deschisă $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, astfel încât

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \pi_i(\mathbf{x}) \in U \text{ și } x_i = h(\pi_i(\mathbf{x}))\}.$$

OBSERVAȚIA 2.2.2. Multimea P definită mai sus este graficul în $\mathbb{R}^n$ al funcției diferentiabile h , gândind h ca fiind definit pe o submulțime deschisă a $(n-1)$ -hiperplanului de coordonate $\pi_i(\mathbb{R}^n)$ care este generat de vectorii bazei canonice $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_n$. Altfel spus, coordonata i a unui punct din P este o funcție diferentiabilă a celor $n-1$ coordonate rămase. Se va vedea în demonstrația Teoremei 2.2.5 că fiecare petic $(n-1)$ -dimensional din $\mathbb{R}^n$ are un plan tangent $(n-1)$ dimensional în fiecare dintre punctele sale.

DEFINIȚIA 2.2.3. Multimea M din $\mathbb{R}^n$ se numește *varietate $(n-1)$ -dimensională* (sau simplu o *$(n-1)$ -varietate*), dacă și numai dacă fiecare punct $\mathbf{a} \in M$ se află într-o submulțime deschisă U de $\mathbb{R}^n$ astfel încât $U \cap M$ este un patch $(n-1)$ -dimensional (a se vedea Figura 2.2.1).

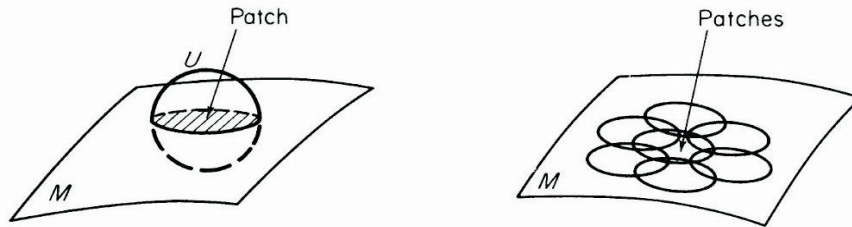


FIGURA 2.2.1. Definiția varietății

OBSERVAȚIA 2.2.4. O varietate este o reuniune de petice, deși acest lucru nu este chiar corect, deoarece într-o unire arbitrară de petice două dintre ele s-ar putea intersecta „greșit”.

TEOREMA 2.2.5. Dacă M este o varietate $(n-1)$ -dimensională în $\mathbb{R}^n$, atunci, în fiecare dintre punctele sale, M are un plan tangent $(n-1)$ -dimensional.

DEMONSTRAȚIE. Cum $\mathbf{a} \in M$, dorim să arătăm că reuniunea tuturor dreptelor tangente în $\mathbf{a}$, la curbele diferentiabile prin $\mathbf{a}$ de pe M , este un plan $(n-1)$ -dimensional sau, echivalent, că mulțimea tuturor vectorilor vitează ai unor astfel de curbe este un subspațiu $(n-1)$ dimensional al lui $\mathbb{R}^n$.

Faptul că M este o $(n-1)$ -varietate înseamnă că, într-o vecinătate a lui $\mathbf{a}$, M coincide cu graficul unei funcții diferențiabile $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Adică, pentru un $i \leq n$, $x_i = h(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$ pentru toate punctele $(x_1, \dots, x_n)$ din M suficient de aproape de $\mathbf{a}$. Să considerăm cazul $i = n$ (de care celelalte cazuri diferă doar printr-o permutare a coordonatelor).

Fie $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M$ o curbă diferențiabilă cu $\varphi(0) = \mathbf{a}$ și fie $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, $\psi = \pi \circ \varphi$, unde $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ este proiecția obișnuită. Dacă $\psi(0) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$, atunci imaginea lui φ "aproape de" $\mathbf{a}$ se află „deasupra” imaginii lui ψ "aproape de" $\mathbf{b}$. Adică $\varphi(t) = (\psi(t), h(\psi(t)))$ pentru t suficient de aproape de 0. Aplicând regula lanțului, se obține

$$(2.2.1) \quad \varphi'(0) = (\psi'(0), \nabla h(\mathbf{b}) \cdot \psi'(0)) = \sum_{i=1}^{n-1} \psi'_i(0) (\mathbf{e}_i, D_i h(\mathbf{b})),$$

unde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ sunt vectorii bazei canonice în $\mathbb{R}^{n-1}$. În consecință, $\varphi'(0)$ se află în subspațiul $(n-1)$ -dimensional al lui $\mathbb{R}^n$ generat de $n-1$ (în mod clar liniar independent) vectori

$$(\mathbf{e}_1, D_1 h(\mathbf{b})), \dots, (\mathbf{e}_{n-1}, D_{n-1} h(\mathbf{b})).$$

Dat fiind un vector $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n-1} v_i (\mathbf{e}_i, D_i h(\mathbf{b}))$ din acest spațiu $(n-1)$ -dimensional, se consideră curba diferențiabilă $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M$ definită de

$$\varphi(t) = (\mathbf{b} + t\mathbf{w}, h(\mathbf{b} + t\mathbf{w})),$$

unde $\mathbf{w} = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Din (2.2.1) este clar că $\varphi'(0) = \mathbf{v}$. Astfel, fiecare punct al subspațiului nostru $(n-1)$ -dimensional este vectorul viteză al unei curbe prin $\mathbf{a}$ pe M . $\square$

2.3. Teorema funcțiilor implicite

OBSERVAȚIA 2.3.1. Pentru a aplica Teorema 2.2.5, trebuie să putem recunoaște o $(n-1)$ -varietate. Se va da în Teorema 2.3.3 de mai jos o condiție suficientă utilă ca o mulțime $M \subset \mathbb{R}^n$ să fie o $(n-1)$ -varietate. Pentru demonstrarea sa avem nevoie de următoarea teoremă de bază. Se afirmă că dacă $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^1 și $g(\mathbf{a}) = 0$ cu una din derivatele parțiale $D_i g(\mathbf{a}) \neq 0$, atunci pe o vecinătate a lui $\mathbf{a}$ ecuația

$$g(x_1, \dots, x_n) = 0$$

poate fi „rezolvată pentru x_i , în funcție de variabilele rămase”. Aceasta implică faptul că, pe o vecinătate a lui $\mathbf{a}$, mulțimea $S = g^{-1}(0)$ arată ca un petic $(n-1)$ -dimensional, deci ca o $(n-1)$ -varietate. Se va prezenta această teoremă pentru $i = n$.

TEOREMA 2.3.2 (Teorema funcțiilor implicite - forma "clasică"). *Fie $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 și presupunem că $G(\mathbf{a}) = 0$, iar $D_n G(\mathbf{a}) \neq 0$. Atunci există o vecinătate U a lui $\mathbf{a}$ și o funcție diferențiabilă F definită pe o vecinătate V a lui $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, astfel încât*

$$U \cap G^{-1}(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V \text{ și } x_n = F(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

În particular,

$$G(x_1, \dots, x_{n-1}, F(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0,$$

pentru toți $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in V$.

TEOREMA 2.3.3. *Se presupune că $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^1 . Dacă M este mulțimea tuturor acelor puncte $\mathbf{x} \in S = g^{-1}(0)$ cu $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, atunci M este o $(n-1)$ -varietate. Dat fiind $\mathbf{a} \in M$, vectorul gradient $\nabla g(\mathbf{a})$ este ortogonal la planul tangent la M în $\mathbf{a}$.*

EXEMPLUL 2.3.4. Dacă $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$, atunci M este "sfera unitate" S^{n-1} din $\mathbb{R}^n$, deci Teorema 2.3.3 oferă o demonstrație rapidă că S^{n-1} este o $(n-1)$ -varietate.

Toate cele anterioare permit a demonstra

TEOREMA 2.3.5. *Să presupunem că $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^1 și fie M mulțimea tuturor acelor puncte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ în care $g(\mathbf{x}) = 0$ și $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Dacă funcția diferentiabilă $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ atinge un maxim sau un minim local pe M în punctul $\mathbf{a} \in M$, atunci*

$$(2.3.1) \quad \nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a}),$$

pentru un număr λ (numit „multiplicatorul Lagrange”).

DEMONSTRAȚIE. Din Teorema 2.3.3, M este o $(n-1)$ -varietate, deci M are un plan tangent $(n-1)$ -dimensional, cu Teorema 2.2.5. Vectorii $\nabla f(\mathbf{a})$ și $\nabla g(\mathbf{a})$ sunt ambii ortogonali la acest plan tangent, din Teoremele 2.1.3 și, respectiv, 2.3.3. Deoarece complementul ortogonal la un subspațiu $(n-1)$ -dimensional al lui $\mathbb{R}^n$ este unidimensional, rezultă că $\nabla f(\mathbf{a})$ și $\nabla g(\mathbf{a})$ sunt coliniare. Deoarece $\nabla g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, acest lucru implică faptul că $\nabla f(\mathbf{a})$ este un multiplu al lui $\nabla g(\mathbf{a})$. $\square$

OBSERVAȚIA 2.3.6. Conform teoremei anterioare, pentru a maximiza sau a minimiza funcția $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ supusă „constrângerii”

$$g(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

este suficient a rezolva ecuațiile scalare

$$g(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{și} \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}),$$

pentru $n+1$ „necunoscute” $x_1, \dots, x_n, \lambda$. Dacă aceste ecuații au mai multe soluții, putem determina care (dacă există) dă un maxim și care dă un minim, calculând valoarea lui f în fiecare. Aceasta este pe scurt „metoda multiplicatorului Lagrange”.

Se dorește generalizarea "metodei multiplicatorului Lagrange" astfel încât să putem maximiza sau minimiza o funcție $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ supusă mai multor "constrângeri"

$$(2.3.2) \quad g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0,$$

unde $m < n$.

De exemplu, să presupunem că dorim să maximizăm funcția $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ în condițiile $x^2 + y^2 = 1$ și $x + y + z = 0$. Intersecția cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ și a planului $x + y + z = 0$ este o elipsă în $\mathbb{R}^3$ și se cere pur și simplu distanța maximă de la origine până la un punct al acestei elipse.

Dacă $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este aplicația ale cărei funcții componente sunt funcțiile $g_1, \dots, g_m$, atunci ecuațiile (2.3.2) pot fi rescrise ca $G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Mulțimea $S = G^{-1}(\mathbf{0})$ poate fi (într-un anumit sens) o suprafață $(n-m)$ -dimensională în $\mathbb{R}^n$. Pentru a fi mai exacti, trebuie să definim k -varietăți în $\mathbb{R}^n$, pentru $k < n$.

OBSERVAȚIA 2.3.7. (i). Definiția patch-urilor $(n-1)$ -dimensionale poate fi reformulată, spunând că $P \subset \mathbb{R}^n$ este un *patch (petic) $(n-1)$ -dimensional* dacă și numai dacă există o permutare $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ a coordonatelor $x_1, \dots, x_n$ în $\mathbb{R}^n$ și o funcție diferentiabilă $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ pe o mulțime deschisă $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, astfel încât

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}) \in U \text{ și } x_{i_n} = h(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}})\}.$$

(ii). Analog, mulțimea $P \subset \mathbb{R}^n$ este un *patch (petic) k -dimensional* dacă și numai dacă există o permutare $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ din $x_1, \dots, x_n$ și o aplicație diferentiabilă $h : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ definită pe o mulțime deschisă $U \subset \mathbb{R}^k$, astfel încât,

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in U \text{ și } (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) = h(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})\}.$$

Astfel P este pur și simplu graficul lui h , considerat ca o funcție de $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, mai degrabă decât $x_1, \dots, x_k$ ca de obicei; coordonatele $x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}$ ale unui punct de P sunt funcții diferentiabile ale coordonatelor k rămase (Figura 2.3.1).

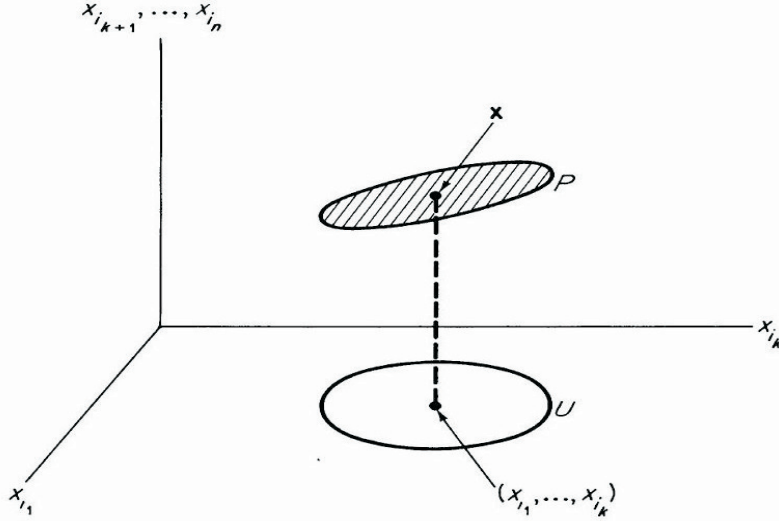


FIGURA 2.3.1. Varietate k -dimensională

DEFINIȚIA 2.3.8. Mulțimea $M \subset \mathbb{R}^n$ se numește o *varietate k -dimensională în $\mathbb{R}^n$* , sau *k -varietate*, dacă fiecare punct al lui M se află într-o submulțime deschisă V de $\mathbb{R}^n$ astfel încât $V \cap M$ este un petic k -dimensional.

OBSERVAȚIA 2.3.9. (i). O k -varietate este o mulțime alcătuită din patch-uri k -dimensionale, în același mod în care o $(n-1)$ -varietate este formată din $(n-1)$ patch-uri dimensionale.

(ii). De exemplu, este ușor de verificat că cercul $x^2 + y^2 = 1$ în planul xy este o 1-varietate în $\mathbb{R}^3$. Acesta este un caz special al faptului că, dacă M este o k -varietate în $\mathbb{R}^n$, iar $\mathbb{R}^n$ este privit ca un subspațiu al lui $\mathbb{R}^p$ ($p > n$), atunci M este o k -varietate în $\mathbb{R}^p$.

Următorul rezultat este generalizarea Teoremei 2.2.5.

TEOREMA 2.3.10. Dacă M este o varietate k -dimensională în $\mathbb{R}^n$ atunci, în fiecare dintre punctele sale, M are un plan tangent k -dimensional.

Pentru a generaliza Teorema 2.3.3 este necesară următoarea generalizare a Teoremei funcției implicite:

TEOREMA 2.3.11 (Generalizarea Teoremei funcțiilor implicite). *Fie $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m < n$) o aplicație de clasă C^1 . Să presupunem că $G(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ și că rangul matricei Jacobiene asociate lui G în $\mathbf{a}$ ($G'(\mathbf{a})$) este m . Apoi există o permutare $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ a coordonatelor în $\mathbb{R}^n$, o submulțime deschisă U de $\mathbb{R}^n$ care conține $\mathbf{a}$, o submulțime deschisă V de $\mathbb{R}^{n-m}$ care conține $\mathbf{b} = (a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-m}})$ și o aplicație diferențiabilă $h : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ astfel încât fiecare punct $\mathbf{x} \in U$ se află pe $S = G^{-1}(\mathbf{0})$ dacă și numai dacă $(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}) \in V$ și*

$$(x_{i_{n-m+1}}, \dots, x_{i_n}) = h(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}).$$

Reamintim că matricea $m \times n$ $G'(\mathbf{a})$ are rang m dacă și numai dacă m vectori de rând $\nabla G_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla G_m(\mathbf{a})$ (vectorii gradient ai funcțiilor componente ale lui G) sunt liniar independenți. Dacă $m = 1$, deci $G = g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, aceasta este doar condiția ca $\nabla g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, deci o derivată parțială $D_i g(\mathbf{a}) \neq 0$. Astfel, teorema de mai sus este într-adevăr o generalizare a Teoremei funcțiilor implicite.

OBSERVAȚIA 2.3.12. Concluzia teoremei anterioare afirmă că, într-o vecinătate a lui $\mathbf{a}$, sistemul de m ecuații

$$G_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, G_m(\mathbf{x}) = 0,$$

poate fi rezolvat (unic) în raport cu cele m variabile $x_{i_{n-m+1}}, \dots, x_{i_n}$, ca funcții diferențiabile funcție de variabilele $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}$. Astfel, mulțimea $S = G^{-1}(\mathbf{0})$ arată, într-o vecinătate a lui $\mathbf{a}$, ca o varietate $(n - m)$ -dimensională. Folosind Generalizarea Teoremei funcțiilor implicite în locul Teoremei funcțiilor implicite, demonstrația Teoremei 2.3.3 se traduce într-o demonstrație a următoarei generalizări.

TEOREMA 2.3.13. *Se presupune că aplicația $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este de clasă C^1 . Dacă M este mulțimea tuturor acelor puncte $\mathbf{x} \in S = G^{-1}(\mathbf{0})$ pentru care rangul lui $G'(\mathbf{x})$ este m , atunci M este o $(n - m)$ -varietate. Pentru $\mathbf{a} \in M$, vectorii de gradient $\nabla G_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla G_m(\mathbf{a})$, ai funcțiilor componente ale lui G sunt toți ortogonali planului tangent la M în $\mathbf{a}$.*

OBSERVAȚIA 2.3.14. Pe scurt, Teorema anterioară afirmă că soluția a m ecuații în $n > m$ variabile este, în general, o varietate $(n - m)$ -dimensională în $\mathbb{R}^n$. Aici expresia „în general” înseamnă că, dacă ecuațiile sunt

$$G_1(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

$$\vdots$$

$$G_m(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

trebuie ca funcțiile $G_1, \dots, G_m$ să fie de clasă C^1 și, de asemenea, ca vectorii de gradient $\nabla G_1, \dots, \nabla G_m$ să fie liniar independenți în fiecare punct al lui $M = G^{-1}(\mathbf{0})$ și, în sfârșit, că M nu este vidă.

Se va da versiunea generală a metodei multiplicatorului Lagrange:

TEOREMA 2.3.15 (Metoda multiplicatorilor Lagrange). *Se presupune că $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m < n$) este de clasă C^1 și fie M mulțimea tuturor acelor puncte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pentru care $G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ și, de asemenea, vectorii de gradient $\nabla G_1(\mathbf{x})$,*

$\dots, \nabla G_m(\mathbf{x})$ sunt liniar independenți. Dacă funcția diferentiabilă $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ atinge un maxim sau un minim local pe M în punctul $\mathbf{a} \in M$, atunci există numerele reale $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (numiți multiplicatori Lagrange) astfel încât

$$(2.3.3) \quad \nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \nabla G_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_m \nabla G_m(\mathbf{a}).$$

DEMONSTRAȚIE. Din Teorema 2.3.13, M este o $(n - m)$ -varietate și, prin urmare, are un plan tangent $(n - m)$ -dimensional $T_{\mathbf{a}}$ în $\mathbf{a}$, cu Teorema 2.3.10. Dacă $N_{\mathbf{a}}$ este complementul ortogonal al translatatului $T_{\mathbf{a}}$ în origine, atunci din chestiuni elementare de algebră liniară rezultă că $\dim N_{\mathbf{a}} = m$. Vectorii liniar independenți $\nabla G_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla G_m(\mathbf{a})$ se află în $N_{\mathbf{a}}$ (Teorema 2.3.13) și, prin urmare, constituie o bază pentru $N_{\mathbf{a}}$. Deoarece, din Teorema 2.1.3, $\nabla f(\mathbf{a})$ se află și în $N_{\mathbf{a}}$, rezultă că $\nabla f(\mathbf{a})$ este o combinație liniară a vectorilor $\nabla G_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla G_m(\mathbf{a})$. $\square$

Pe scurt, pentru a localiza toate punctele $(x_1, \dots, x_n) \in M$ unde f poate atinge o valoare maximă sau minimă, este suficient să rezolvăm $n + m$ ecuații scalare

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ G_m(\mathbf{x}) &= 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) &= \lambda_1 \nabla G_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_m \nabla G_m(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

pentru cele $n + m$ "necunoscute" $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

2.4. Varietăți netede și varietăți orientabile

Se poate spune că o varietate k -dimensională în $\mathbb{R}^n$ este o mulțime M care arată local ca graficul unei aplicații de la $\mathbb{R}^k$ la $\mathbb{R}^{n-k}$. Adică, fiecare punct al lui M se află într-o submulțime deschisă V a lui $\mathbb{R}^n$ astfel încât $P = V \cap M$ este un petic k -dimensional; aceasta înseamnă că există o permutare $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ a lui $x_1, \dots, x_n$ și o aplicație diferentiabilă $h : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ definită pe o mulțime deschisă $U \subset \mathbb{R}^k$, astfel încât

$$P = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in U \text{ și } (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) = h(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \}.$$

DEFINIȚIA 2.4.1. În condițiile de mai sus,

- (i). P se va numi *petic (patch) neted (sau de clasă C^1)* dacă aplicația h este de clasă C^1 ;
- (ii). varietatea M se va numi *netedă (sau de clasă C^1)* dacă este o reuniune de petice netede.

Există trei moduri standard prin care poate defini (local) o k -varietate în $\mathbb{R}^n$:

- (a) ca grafic al unei aplicații $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$;
- (b) ca "zerouri" ale unei aplicații $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$;
- (c) ca imaginea unei aplicații $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definiția unei varietăți se bazează pe (a), care este de fapt un caz special pentru (b) și (c), deoarece graficul lui $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ este același cu mulțimea zerourilor lui $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$ și este, de asemenea, imaginea lui $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, unde $F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$.

Se dorește obținerea unor condiții în care (b) și (c) sunt, de fapt, echivalente cu (a).

Studiul metodei "multiplicatorilor Lagrange" s-a bazat pe apariția varietăților în forma (b). Următorul rezultat a fost enunțat (fără demonstrație) în Teorema 2.3.13.

TEOREMA 2.4.2. *Fie $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ o aplicație de clasă C^1 , unde $k = n - m > 0$. Dacă M este mulțimea tuturor acelor puncte $\mathbf{x} \in G^{-1}(\mathbf{0})$ pentru care matricea derivată $G'(\mathbf{x})$ are rang m , atunci M este o k -varietate netedă.*

OBSERVAȚIA 2.4.3. (i). Dacă M este o k -varietate în $\mathbb{R}^n$ și U este o submulțime deschisă al lui $\mathbb{R}^k$, atunci o aplicație $\varphi : U \rightarrow M$ poate fi privită ca o parametrizare a submulțimii $\varphi(U)$ a lui M .

De exemplu, parametrizarea coordonatelor sferice $\varphi : \mathbb{R}_{uv}^2 \rightarrow S^2$ a sferei unității $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, definită prin

$$\varphi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

(ii). Teorema de mai sus afirmă că, dacă submulțimea M a lui $\mathbb{R}^n$ poate fi parametrizată corespunzător prin intermediul unei aplicații definite pe o mulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^k$ pe M , atunci M este o k -varietate netedă.

DEFINIȚIA 2.4.4. Fie $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ o aplicație de clasă C^1 definită pe o submulțime deschisă U a lui $\mathbb{R}^k$ ($k \leq n$). Atunci, aplicația φ se numește *regulată* dacă matricea derivată $\varphi'(\mathbf{u})$ are rang maxim k , pentru fiecare $\mathbf{u} \in U$.

Conform următoarelor teoreme, o submulțime M a lui $\mathbb{R}^n$ este o k -varietate netedă dacă este, local, imaginea unei aplicații de clasă C^1 obișnuite, definită pe o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^k$.

TEOREMA 2.4.5. *Fie M o submulțime a lui $\mathbb{R}^n$. Se presupune că, dat fiind $\mathbf{p} \in M$, există o mulțime deschisă $U \subset \mathbb{R}^k$ ($k < n$) și o aplicație de clasă C^1 obișnuită $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ astfel încât $\mathbf{p} \in \varphi(U)$, cu $\varphi(U')$ submulțime deschisă a lui M pentru fiecare mulțime deschisă $U' \subset U$. Atunci M este o k -varietate netedă.*

OBSERVAȚIA 2.4.6. (i). Afirmția că $\varphi(U')$ este o submulțime deschisă a lui M înseamnă că există o mulțime deschisă W' în $\mathbb{R}^n$ astfel încât $W' \cap M = \varphi(U')$. Ipoteza că $\varphi(U')$ este deschisă în M , pentru fiecare submulțime deschisă U' de U și nu doar pentru U în sine, este necesară dacă urmează concluzia că M este o k -varietate. Că acest lucru este adevărat poate fi văzut luând în considerare "o cifră șase în plan" - deși nu este o 1-varietate, în mod evident, există o aplicație injectivă $\varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ care are ca imagine "cifră șase".

(ii). În notația de mai sus, aplicația

$$\Phi = g \circ \pi : W' \rightarrow U'$$

este o inversă (locală) de clasă C^1 alui φ ; adică, Φ este o aplicație de clasă C^1 pe submulțimea deschisă W' a lui $\mathbb{R}^n$ și $\Phi(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}(\mathbf{x})$ pentru $\mathbf{x} \in W' \cap M$. Acest fapt va fi folosit în demonstrarea Teoremei 2.4.9 de mai jos.

DEFINIȚIA 2.4.7. Dacă M este o k -varietate netedă, iar $\varphi : U \rightarrow M$ satisface ipotezele teoremei 2.4.5, atunci aplicația φ se numește *pachet de coordonate pentru M* dacă este injectivă; adică, un pachet de coordonate pentru M este o aplicație de clasă C^1 injectivă $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definită pe o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^k$, astfel încât $\varphi(U')$ este o submulțime deschisă în M , pentru fiecare submulțime deschisă U' din U .

OBSERVAȚIA 2.4.8. (i). „Graficele locale” ale peticelor, pe care ne-am bazat definiția unei varietăți, produc pachete de coordonate după cum urmează: dacă M este o k -varietate netedă în $\mathbb{R}^n$ și W este o mulțime deschisă astfel încât $W \cap M$ este graficul unei aplicații de clasă C^1 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ($U \subset \mathbb{R}^k$), atunci aplicația $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definită de $\varphi(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, f(\mathbf{u}))$ este un pachet de coordonate pentru M ; se verifică simplu acest fapt.

(ii). Fiecare varietate netedă M posedă nenumărate de pachete de coordonate. În special, fiecare punct al lui M se află în imaginea unui pachet de coordonate, deci există o familie $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de pachete de coordonate pentru M astfel încât

$$M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \varphi_\alpha(U_\alpha),$$

U_α fiind domeniul de definiție al lui φ_α . O astfel de colecție de pachete de coordonate se numește *atlas pentru M* .

Cea mai importantă proprietate a pachetelor de coordonate este aceea că "se suprapun diferentiabil", în sensul următoarei teoreme.

TEOREMA 2.4.9. Fie M o k -varietate netedă în $\mathbb{R}^n$ și fie $\varphi_1 : U_1 \rightarrow M$ și $\varphi_2 : U_2 \rightarrow M$ două pachete de coordonate cu $\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)$ nevidă. Atunci aplicația

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : \varphi_2^{-1}(\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)) \rightarrow \varphi_1^{-1}(\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2))$$

este de clasă C^1 .

OBSERVAȚIA 2.4.10. Fie $\{\varphi_i\}_{i \in \Lambda}$ un atlas pentru k -varietatea netedă $M \subset \mathbb{R}^n$ și

$$T_{ij} := \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j : \varphi_j^{-1}(\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j)) \rightarrow \varphi_i^{-1}(\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j)),$$

dacă $\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j)$ este nevidă. Atunci T_{ij} este o aplicație de clasă C^1 , din teorema de mai sus și are ca inversă de clasă C^1 pe T_{ji} . Din regula lanțului rezultă că

$$(\det T'_{ji}(T_{ij}(\mathbf{x}))) (\det T'_{ij}(\mathbf{x})) = 1,$$

deci $\det T'_{ij}(\mathbf{x}) \neq 0$ pe domeniul de definiție al lui T_{ij} .

DEFINIȚIA 2.4.11. k -varietatea netedă M se numește *orientabilă* dacă există un atlas $\{\varphi_i\}$ pentru M astfel încât fiecare dintre aplicațiile de „schimbare a coordonatelor” T_{ij} definite mai sus are determinantul jacobian pozitiv,

$$\det T_{ij} > 0,$$

pe domeniul său de definiție. Perechea $(M, \{\varphi_i\})$ se va numi *k -varietate orientată*.

OBSERVAȚIA 2.4.12. Nu orice varietate poate fi orientată. Exemplul clasic de varietate neorientabilă este banda Möbius, ce poate fi construită prin lipirea capetelor unei benzi lungi de hârtie după ce aceasta s-a răsucit pe jumătate. Orientabilitatea este foarte importantă la integrarea pe varietăți.

DEFINIȚIA 2.4.13. O k -celulă netedă din k -varietatea netedă $M \subset \mathbb{R}^n$ este imaginea A a unei aplicații $\varphi : I^k \rightarrow M$ care se extinde la un pachet de coordonate pentru M (definit pe o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^k$ care conține I^k). Dacă M este orientată, se spune că k -celula A este orientată (pozitiv față de orientarea lui M) dacă acest pachet de coordonate păstrează orientarea.

(ii). O k -celulă orientată în k -varietatea netedă orientată $M \subset \mathbb{R}^n$ este o pereche (A, φ) , unde $\varphi : I^k \rightarrow M$ este o aplicație de clasă C^1 , care se extinde la un pachet de coordonate care păstrează orientarea și $A = \varphi(I^k)$.

(iii). Fața a (i, ε) -a a lui A , $A_{i,\varepsilon}$, este imaginea prin φ a feței a (i, ε) -a a lui I^k , anume $A_{i,\varepsilon} = \varphi(I_{i,\varepsilon}^{k-1})$. Astfel $A_{i,\varepsilon}$ este imaginea lui I^{k-1} prin funcția

$$\varphi_{i,\varepsilon} = \varphi \circ l_{i,\varepsilon} : I^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

DEFINIȚIA 2.4.14. Fie R o regiune compactă (închiderea unei submulțimi deschise) în k -varietatea netedă $M \subset \mathbb{R}^n$. Prin *celulație orientată a lui R* se înțelege o colecție $\mathcal{K} = \{A_1, \dots, A_p\}$ de k -celule pe M care îndeplinesc următoarele condiții:

(a) $R = \bigcup_{r=1}^p A_r$.

(b) Pentru fiecare r și s , intersecția $A_r \cap A_s$ este fie vidă, fie este reuniunea uneia sau mai multor fețe comune ale lui A_r și A_s .

(c) Dacă B este o față $(k-1)$ -dimensională a lui A_r , atunci fie A_r este singura k -celulă a lui $\mathcal{K}$ având B ca față, sau există exact o altă k -celulă A_s având și B ca față. În primul caz B se numește o *față frontieră*; în celălalt caz B se numește *față interioară*.

(d) Dacă B este o față interioară, cu A_r și A_s cele două k -celule ale lui $\mathcal{K}$ având B ca față, atunci A_r și A_s induc orientări opuse pe B .

(e) Frontiera ∂R a lui R (ca submulțime a lui M) este uniunea tuturor fețelor frontieră ale k -celulelor lui $\mathcal{K}$. Perechea $(R, \mathcal{K})$ se numește *regiune celulată orientată în M* .

2.5. Varietăți "cu bord"

DEFINIȚIA 2.5.1. O k -varietate-cu-bord netedă orientată compactă este o regiune compactă V într-o k -varietate orientată $M \subset \mathbb{R}^n$, astfel încât frontiera sa ∂V este o $(k-1)$ -varietate netedă (compactă).

EXEMPLUL 2.5.2. (i). Bila unitate B^n este o n -varietate-cu-bord compactă.

(ii). "Bila elipsoidală"

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

este o 3-varietate-cu-bord compactă, la fel ca și torul solid obținut prin rotirea în jurul axei z a discului $(y-a)^2 + z^2 \leq b^2$ în planul yOz .

(iii). Emisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ este o 2-varietate-cu-bord compactă, la fel ca și "inelul" $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$.

OBSERVAȚIA 2.5.3. Dacă V este o k -varietate-cu-bord netedă orientată compactă conținută în k -varietatea netedă orientată $M \subset \mathbb{R}^n$, atunci frontiera sa ∂V este o $(k-1)$ -varietate orientabilă; orientarea pozitivă a lui ∂V este definită după cum urmează: pentru oricare $\mathbf{p} \in \partial V$, există o patch de coordonate $\Phi : U \rightarrow M$ astfel încât

(i) $\mathbf{p} \in \Phi(U)$,

(ii) $\Phi^{-1}(\partial V) \subset \mathbb{R}^k$ și

(iii) $\Phi^{-1}(\text{int } V)$ este conținut în semi-spațiul deschis $x_k > 0$ al $\mathbb{R}^k$.

Alegem Φ să fie un "patch" de coordonate care păstrează orientarea pentru M dacă k este par, și un patch de coordonate care inversează orientarea pentru M dacă k este impar. Existența unui astfel de "patch" de coordonate poate fi dovedită.

Dacă Φ este un astfel de "patch" de coordonate pentru M , atunci $\varphi = \Phi|_{U \cap \mathbb{R}^{k-1}}$ este un "patch" de coordonate pentru $(k-1)$ -varietatea ∂V (frontiera lui V). Dacă $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ este o colecție de astfel de "patch"-uri de coordonate pentru M , ale căror imagini acoperă ∂V , atunci restricțiile lor $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ până la $\mathbb{R}^{k-1}$ formează un atlas pentru ∂V . Deoarece faptul că Φ_i și Φ_j se suprapun pozitiv (deoarece fie ambele păstrează orientarea, fie ambele inversează orientarea) implică faptul că φ_i și φ_j se suprapun pozitiv, acest atlas $\{\varphi_i\}$ este o orientare pentru ∂V . Este (prin definiție) *orientarea pozitivă a lui ∂V* .

2.6. k -forme diferențiale și formula lui Stokes

DEFINIȚIA 2.6.1. Fie $(\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ (k factori) și fie funcția

$$M : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}.$$

M este o funcție definită pe k -tuple de vectori din $\mathbb{R}^n$, $M(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^k) \in \mathbb{R}$ dacă $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^k$ sunt vectori în $\mathbb{R}^n$. Astfel putem considera M ca o funcție de k variabile vectoriale.

(i). Funcția M se numește *k -multiliniară* (sau doar *multiliniară*) dacă este liniară în fiecare dintre aceste variabile separat, i.e.

$$M(\mathbf{a}^1, \dots, x\mathbf{a} + y\mathbf{b}, \dots, \mathbf{a}^k) = xM(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}, \dots, \mathbf{a}^k) + yM(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{a}^k).$$

(ii). Funcția k -multiliniară M se numește *alternată* dacă

$$M(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^k) = 0,$$

dacă există o pereche de vectori $\mathbf{a}^r = \mathbf{a}^s$ pentru $r \neq s$.

(iii). O *formă k -diferențială α , definită pe mulțimea $U \subset \mathbb{R}^n$* , este o aplicație care asociază în fiecare punct $\mathbf{x} \in U$ o funcție k -multiliniară alternată $\alpha(\mathbf{x}) = \alpha_{\mathbf{x}}$ pe $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$\alpha : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n),$$

unde $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ este mulțimea tuturor funcțiilor k -multiliniare alternate pe $\mathbb{R}^n$. Deoarece se poate dovedi că fiecare funcție k -multiliniară alternată pe $\mathbb{R}^n$ este o combinație liniară (unică) a "multidiferențialelor" $d\mathbf{x}_i$, rezultă că $\alpha(\mathbf{x})$ poate fi scrisă sub forma

$$(1) \quad \alpha(\mathbf{x}) = \sum_{[i]} a_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_i$$

unde, ca de obicei, $[i]$ denotă însumarea tuturor k -tuplurilor $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$ cu $1 \leq i_r \leq n$, iar fiecare a_i este o funcție cu valori reale pe U . Forma k -diferențială α se numește *continuă* (sau *de clasă C^1* , etc.) cu condiția ca fiecare dintre funcțiile componente a_i să fie continuă (sau de clasă C^1 etc.).

(iv). Dacă α este o k -formă diferențială de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^n$ și $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o suprafață k -dimensională de clasă C^1 , atunci *integrala lui α pe φ* este definită de

$$(2.6.1) \quad \int_{\varphi} \alpha = \int_Q \alpha_{\varphi(\mathbf{u})} (D_1\varphi(\mathbf{u}), \dots, D_k\varphi(\mathbf{u})) du_1 \cdots du_k.$$

Deoarece derivatele parțiale $D_1\varphi, \dots, D_k\varphi$ sunt vectori în $\mathbb{R}^n$, partea dreaptă a lui (2.6.1) este integrala „obișnuită” a unei funcții continue cu valori reale pe intervalul k -dimensional $Q \subset \mathbb{R}^k$.

Avem trei versiuni pentru formula lui Stokes:

TEOREMA 2.6.2. Fie (A, φ) o k -celulă orientată în k -varietatea orientată $M \subset \mathbb{R}^n$ și fie α o $(k-1)$ -formă diferențială de clasă C^1 care este definită pe o submulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$ care conține A . Atunci

$$\int_A d\alpha = \int_{\partial A} \alpha.$$

TEOREMA 2.6.3. Fie $(R, \mathcal{K})$ o regiune celulată orientată într-o k -varietate netedă orientată din $\mathbb{R}^n$. Dacă α este o $(k-1)$ -formă diferențială de clasă C^1 definită pe o submulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$ care conține R , atunci

$$\int_R d\alpha = \int_{\partial R} \alpha.$$

TEOREMA 2.6.4. Fie V o k -varietate-cu-bord netedă orientată compactă într-o k -varietate orientată $M \subset \mathbb{R}^n$. Dacă ∂V are orientarea pozitivă, iar α este o $(k-1)$ -formă diferențială de clasă C^1 definită pe o submulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$ care conține V , atunci

$$\int_V d\alpha = \int_{\partial V} \alpha.$$

2.7. Aplicația "arie"

DEFINIȚIA 2.7.1. (i). Un "patch" (petic) de suprafață k -dimensională în $\mathbb{R}^n$ este o aplicație de clasă C^1 $F : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$, unde Q este un interval k -dimensional (sau paralelipiped dreptunghiular) în $\mathbb{R}^k$, care este injectivă pe interiorul lui Q .

(ii). Aria k -dimensională $a(F)$ a "patch"-ului de suprafață k -dimensională $F : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ este

$$(2.7.1) \quad a(F) = \int_Q [\det F'(\mathbf{u})^t F'(\mathbf{u})]^{1/2} d\mathbf{u}.$$

EXEMPLUL 2.7.2. Se vor considera suprafețe bidimensionale în $\mathbb{R}^n$. Fie $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ un petec de suprafață bidimensională, unde Q este un dreptunghi în planul uOv . Atunci

$$(\varphi')^t \varphi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Ecuția (2.7.1) implică

$$(2.7.2) \quad a(\varphi) = \iint_Q (EG - F^2)^{1/2} dudv,$$

unde

$$E = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Dacă A este o matrice $n \times k$ și $i = (i_1, \dots, i_k)$, atunci prin A_i s-a notat matricea $k \times k$ al cărui rând al r -lea este al i_r -lea rând al lui A . Dacă aplicăm faptul că $\det A^t \cdot A = \sum_{[i]} (\det A_i)^2$ (formula Binet-Cauchy) pentru ecuația (2.7.1), obținem

$$(2.7.3) \quad a(F) = \int_Q \left[\sum_{[i]} (\det F_i)^2 \right]^{1/2},$$

unde notația $[i]$ înseamnă (ca de obicei) însumarea tuturor k -tuplurilor crescătoare $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$ și $F'_{\mathbf{i}}$ este matricea $k \times k$ al cărei al r -lea rând este al i_r -lea rând al matricei derivate $F' = (\partial F_i / \partial u_j)$. Cu notația pentru determinantul jacobian

$$\det F'_{\mathbf{i}} = \frac{\partial (F_{i_1}, \dots, F_{i_k})}{\partial (u_1, \dots, u_k)},$$

ecuația (2.7.3) devine

$$(2.7.4) \quad a(F) = \int_Q \left[\sum_{[i]} \left(\frac{\partial (F_{i_1}, \dots, F_{i_k})}{\partial (u_1, \dots, u_k)} \right)^2 \right]^{1/2} du_1 \cdots du_k.$$

Alternativ, se poate explica notația $[i]$ ca fiind însumarea peste toate submatricele $k \times k$ ale matricei derivate $n \times k$ F' .

În cazul $k = 2$, $n = 3$ al unui petec de suprafață 2-dimensional F în $\mathbb{R}^3$, dat de

$$x = F_1(u, v), \quad y = F_2(u, v), \quad z = F_3(u, v),$$

ecuația (2.7.4) se reduce la

$$(2.7.5) \quad a(F) = \iint_Q \left[\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 \right]^{1/2} dudv.$$

EXEMPLUL 2.7.3. Considerăm graficul în $\mathbb{R}^n$ al unei funcții de clasă C^1 $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, unde Q este un interval în $\mathbb{R}^{n-1}$. Acest grafic este imaginea în $\mathbb{R}^n$ a zonei de suprafață $F : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ definită de

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1), \dots, x_{n-1})) \in \mathbb{R}^n.$$

Matricea derivată a lui F este

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Se va aplica (2.7.4) pentru a calcula $a(F)$. Pentru început,

$$(2.7.6) \quad \frac{\partial (F_1, \dots, F_{n-1})}{\partial (x_1, \dots, x_{n-1})} = 1.$$

Dacă $i < n$, atunci $\frac{\partial (F_1, \dots, \hat{F}_i, \dots, F_n)}{\partial (x_1, \dots, x_{n-1})}$ este determinantul matricei $(n-1) \times (n-1)$ A_i care este obținută din F' prin ștergerea celui de al i -lea rând al său. Elementele coloanei i a lui A_i sunt toate zero, cu excepția ultimului, care este $\partial f / \partial x_i$. Deoarece cofactorul $\partial f / \partial x_i$ în A_i este matricea identitate $(n-2) \times (n-2)$, explicitarea cu minori de-a lungul celei de a i -a coloane din A_i dă

$$(2.7.7) \quad \frac{\partial (F_1, \dots, \hat{F}_i, \dots, F_n)}{\partial (x_1, \dots, x_{n-1})} = \det A_i = (-1)^{n-1} + i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

pentru $i < n$. Substituind (2.7.6) și (2.7.7) în (2.7.4) dă

$$(2.7.8) \quad a(F) = \int_Q \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \right)^2 \right]^{1/2} = \int_Q [1 + |\nabla f|^2]^{1/2}.$$

CAPITOLUL 3

Complemente de analiză funcțională

Anumite probleme tipice de calcul variațional duc la luarea în considerare a spațiilor de funcții cum ar fi spațiul vectorial $C^0[a, b]$ al tuturor funcțiilor continue definite pe intervalul $[a, b]$, sau $C^1[a, b]$, spațiul funcțiilor diferentiabile cu derivată continuă definite pe intervalul $[a, b]$. Se va defini o normă pe $C^0[a, b]$, norma "supremum", dar și o normă pe $C^1[a, b]$ (ca suma dintre norma "supremum" a funcției dar și a derivatei pe $[a, b]$), numită tot "supremum". După cum se va vedea în secțiunea finală, acest lucru va face posibilă studiarea funcțiilor reale definite pe $C^1[a, b]$ prin metodele calculului diferențial. Se studiază convergența simplă și uniformă a șirurilor de funcții și se obțin rezultatele cu privire la "transferul" proprietăților de continuitate respectiv derivabilitate cu ajutorul convergenței uniforme. Aceasta va permite deducerea completitudinii atât a lui $C^0[a, b]$ dar și a lui $C^1[a, b]$ relativ la normele "supremum" corespunzătoare.

Se discută conceptele de liniaritate și continuitate pentru funcțiile de la un spațiu vectorial normat la altul. Se știe că fiecare aplicație liniară între spațiile euclidiene este continuă; totuși, pentru aplicațiile între spații vectoriale normate cu dimensiuni infinite, liniaritatea nu implică, în general, continuitatea.

Definiția diferentiabilității, pentru aplicațiile pe spații vectoriale normate, este aceeași cu definiția de pe spații euclidiene, cu excepția faptului că trebuie explicit precizat ca aplicația liniară de aproximare să fie continuă. În cazul dimensiunilor finite, $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, matricea $m \times n$ asociată diferențialei într-un punct în bazele canonice ale lui $\mathbb{R}^n$ și $\mathbb{R}^m$, este chiar jacobiana $J_f(x)$. Aici se vor studia aplicațiile între spații de dimensiune infinită, ale căror diferențiale nu sunt reprezentabile prin matrice, astfel încât derivatele nu vor fi disponibile.

În capitolul următor se va studia problema minimizării (sau maximizării) unei funcții diferentiabile cu valori reale $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, definită pe o submulțime M a spațiului vectorial normat E . Pentru a formula rezultatul care va juca rolul pe care îl are Teorema lui Fermat în problemele de maxim-minim finit dimensionale, este nevoie de conceptul de mulțime tangentă. Mulțimea tangentă TM_x a lui M în punctul $x \in M$ este mulțimea tuturor vectorilor viteză în x ai drumurilor diferentiabile din M care trec prin x . Tot în capitolul următor este nevoie de "Teorema funcțiilor implicite" pentru aplicații definite pe spații vectoriale normate complete. Atât enunțul, cât și demonstrația sa, în acest context mai general, sunt în esență aceleași cu cele ale "Teoremei funcțiilor implicite" din cazul finit dimensional; pentru a o enunța, sunt definite întâi derivatele parțiale ale unei aplicații diferentiabile care este definită pe produsul a două spații vectoriale normate E și F .

Sursele bibliografice utilizate sunt [1], [2].

3.1. Spații vectoriale normate și uniform convergență

DEFINIȚIA 3.1.1. O *normă pe spațiul vectorial* V este o funcție cu valoare reală $x \rightarrow |x|$ pe V care îndeplinește următoarele condiții:

- (N1). $|x| > 0$ if $x \neq 0$;
 - (N2). $|ax| = |a||x|$;
 - (N3). $|x + y| \leq |x| + |y|$,
- pentru oricare $x, y \in V$ și $a \in \mathbb{R}$.

OBSERVAȚIA 3.1.2. Norma $|x|$ a vectorului $x \in V$ poate fi considerată lungimea sau „mărimea” acestuia. De asemenea, cum $x, y \in V$, norma $|x - y|$ a lui $x - y$ poate fi considerată „distanța” de la x la y .

EXEMPLUL 3.1.3. Se știe că pe $\mathbb{R}^n$, fiecare din aplicațiile următoare este o normă:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}|_0 &= \max(|x_1|, \dots, |x_n|) && (\text{norma "supremum"}), \\ |\mathbf{x}|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n| && (\text{norma 1}), \\ |\mathbf{x}|_2 &= (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} && (\text{norma euclidiană}), \end{aligned}$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Faptul că $|\cdot|_0$ și $|\cdot|_1$ sunt norme pe $\mathbb{R}^n$ este simplu de verificat, pe când verificarea condiției (N3) pentru $|\cdot|_2$ necesită inegalitatea Cauchy-Schwarz.

DEFINIȚIA 3.1.4. Două norme $|\cdot|_1$ și $|\cdot|_2$ pe spațiul vectorial V se spune că sunt *echivalente* dacă există numere pozitive a și b astfel încât

$$a|x|_1 \leq |x|_2 \leq b|x|_1, \forall x \in V.$$

OBSERVAȚIA 3.1.5. Este foarte simplu să se verifice că această relație între normele pe V este o relație de echivalență (în special axioma de tranzitivitate: dacă normele $|\cdot|_1$ și $|\cdot|_2$ pe V sunt echivalente și, de asemenea, $|\cdot|_2$ și $|\cdot|_3$ sunt echivalente, apoi rezultă că $|\cdot|_1$ și $|\cdot|_3$ sunt norme echivalente pe V).

PROPOZIȚIA 3.1.6. *Oricare două norme pe $\mathbb{R}^n$ sunt echivalente.*

DEMONSTRAȚIE. Se va arăta că orice normă continuă $|\cdot|$ pe $\mathbb{R}^n$ (adică $|\mathbf{x}|$ este o funcție continuă de $\mathbf{x}$) este echivalentă cu norma euclidiană $|\cdot|_2$. Din moment ce $|\cdot|$ este continuă pe sfera unitară

$$S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}|_2 = 1\},$$

există $m, M > 0$ cu

$$m|\mathbf{y}|_2 = m \leq |\mathbf{y}| \leq M = M|\mathbf{y}|_2, \forall \mathbf{y} \in S^{n-1}.$$

Pentru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se alege $a > 0$ cu $\mathbf{x} = a\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in S^{n-1}$. Inegalitatea de mai sus dă

$$ma|\mathbf{y}|_2 \leq |\mathbf{x}| \leq Ma|\mathbf{y}|_2,$$

deci

$$m|\mathbf{x}|_2 \leq |\mathbf{x}| \leq M|\mathbf{x}|_2,$$

așa cum se dorea. □

OBSERVAȚIA 3.1.7. (i). În special, norma "supremum" și norma 1 sunt ambele echivalente cu norma euclidiană, deoarece ambele sunt în mod evident continue.

(ii). Se poate deduce simplu că oricare normă pe $\mathbb{R}^n$ este continuă.

(iii). Normele echivalente pe spațiul vectorial V dau naștere la noțiuni echivalente de convergență secvențială în V . Se spune că șirul $\{x_n\}_{n \geq 1}$ de puncte de V converge către $x \in V$ în raport cu norma $|\cdot|$ dacă și numai dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0.$$

Rezultă imediat din definiții

LEMA 3.1.8. Fie $|\cdot|_1$ și $|\cdot|_2$ norme echivalente în spațiul vectorial V . Atunci șirul $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset V$ converge către $x \in V$ în raport cu norma $|\cdot|_1$ dacă și numai dacă converge către x în raport cu norma $|\cdot|_2$.

EXEMPLUL 3.1.9. Fie V spațiul vectorial al tuturor funcțiilor continue cu valori reale definite pe intervalul închis $[a, b]$, cu operațiile în spațiu vectorial definite de

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad (a\varphi)(x) = a\varphi(x),$$

cu $\varphi, \psi \in V$ și $a \in \mathbb{R}$.

Se pot defini diverse norme pe V , analog cu cele trei norme pe $\mathbb{R}^n$, prin

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_0 &= \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| && \text{(the sup norm)} \\ \|\varphi\|_1 &= \int_a^b |\varphi(x)| dx && \text{(the 1-norm)} \\ \|\varphi\|_2 &= \left(\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} && \text{(the 2-norm)}. \end{aligned}$$

Este o chestiune elementară a arăta că $\|\cdot\|_0$ și $\|\cdot\|_1$ sunt într-adevăr norme pentru V , în timp ce verificarea că $\|\cdot\|_2$ satisface inegalitatea triunghiului necesită inegalitatea Cauchy-Schwarz în forma integrală. Se va nota cu $C^0[a, b]$ spațiul vectorial normat V cu norma $\|\cdot\|_0$.

Nicio pereche dintre cele trei norme de mai sus nu sunt echivalente. De exemplu, pentru a arăta că $\|\cdot\|_0$ și $\|\cdot\|_1$ nu sunt echivalente, se ia în considerare șirul $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ al elementelor lui V definite de

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{dacă } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{dacă } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

și fie $\varphi_0(x) = 0$ pentru $x \in [0, 1]$ (aici $[a, b] = [0, 1]$). Este clar că $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ converge la φ_0 relativ la norma $\|\cdot\|_1$ deoarece

$$\|\varphi_n - \varphi_0\|_1 = \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi_0(x)| dx = \frac{1}{2n} \rightarrow 0.$$

Oricum $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ nu converge la φ_0 relativ la norma $\|\cdot\|_0$ deoarece

$$\|\varphi_n - \varphi_0\|_0 = \|\varphi_n\|_0 = 1,$$

pentru oricare n . Va rezulta din Lema 3.1.8 că normele $\|\cdot\|_0$ și $\|\cdot\|_1$ nu sunt echivalente.

În continuare vrem să demonstrăm că $C^0[a, b]$, cu norma sup, este complet.

DEFINIȚIA 3.1.10. Spațiul vectorial normat V se numește *complet* dacă fiecare șir Cauchy de elemente a lui V converge către un element al lui V . La fel ca în $\mathbb{R}^n$, șirul $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset V$ este numit *șir Cauchy* dacă: pentru oricare $\varepsilon > 0$, există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$m, n \geq N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Aceste definiții sunt strâns legate de următoarele proprietăți ale șirurilor de funcții.

DEFINIȚIA 3.1.11. Fie $\{f_n\}_{n \geq 1}$ un șir de funcții cu valori reale, fiecare definită pe mulțimea S . Atunci

(i). $\{f_n\}_{n \geq 1}$ se numește *șir uniform Cauchy (de funcții pe S)* dacă, pentru oricare $\varepsilon > 0$, există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$m, n \geq N \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in S.$$

(ii). $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniform la funcția $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dacă, pentru oricare $\varepsilon > 0$, există $N \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in S.$$

EXEMPLUL 3.1.12. Se consideră șirul $\{f_n\}_{n \geq 1}$, unde $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția al cărei grafic este prezentat în Figura 3.1.1. Apoi $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ pentru fiecare $x \in [0, 1]$. Șirul $\{f_n\}_{n \geq 1}$ nu converge uniform către limita sa punctuală $f(x) \equiv 0$, deoarece $\|f_n\| = 1$ pentru fiecare n (în norma supremum).

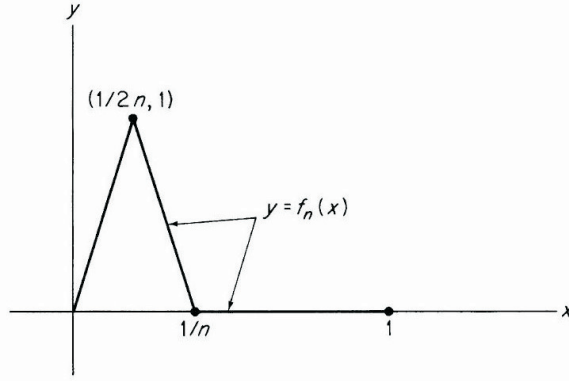


FIGURA 3.1.1. Graficul lui f_n

EXEMPLUL 3.1.13. Fie $f_n(x) = x^n$ on $[0, 1]$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases},$$

deci funcția limită punctuală nu este continuă. Din Teorema 3.1.15 (ce se va da mai jos) rezultă că șirul $\{f_n\}$ nu converge uniform către f .

OBSERVAȚIA 3.1.14. Comparând definițiile de mai sus, concluzionăm că un șir Cauchy în $C^0[a, b]$ este pur și simplu un șir uniform Cauchy de funcții continue pe $[a, b]$ și că șirul $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \subset C^0[a, b]$ converge în raport cu norma supremum către $\varphi \in C^0[a, b]$ dacă și numai dacă converge uniform către φ . Prin urmare, pentru a demonstra că $C^0[a, b]$ este complet, se va arăta că fiecare șir uniform Cauchy de funcții continue pe $[a, b]$ converge uniform către o funcție continuă pe $[a, b]$. Primul pas este demonstrarea că, dacă un șir de funcții continue converge uniform, atunci funcția limită este continuă.

TEOREMA 3.1.15. Fie $S \subset \mathbb{R}^k$. Fie $\{f_n\}_{n \geq 1}$ un șir de funcții continue cu valori reale pe S . Dacă $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniform către funcția $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, atunci f este continuă.

DEMONSTRAȚIE. Cum $\varepsilon > 0$, se alege N suficient de mare încât $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ pentru toți $x \in S$ (din convergența uniformă). Apoi, cum $x_0 \in S$, se alege $\delta > 0$ astfel încât

$$x \in S, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

(din continuitatea lui f_N în x_0). Dacă $x \in S$ și $|x - x_0| < \delta$, atunci rezultă

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

deci f este continuă în x_0 . $\square$

COROLARUL 3.1.16. $C^0[a, b]$ este complet.

DEMONSTRAȚIE. Fie $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ un șir Cauchy de elemente ale lui $C^0[a, b]$, adică un șir uniform Cauchy de funcții continue cu valori reale definite pe $[a, b]$. Cum $\varepsilon > 0$, se alege N astfel încât

$$m, n \geq N \Rightarrow \|\varphi_m - \varphi_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{norma supremum}).$$

Apoi, $|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon/2$ pentru fiecare $x \in [a, b]$. Prin urmare, $\{\varphi_n(x)\}_{n \geq 1}$ este un șir Cauchy de numere reale și, prin urmare, converge către un număr real $\varphi(x)$. Rămâne de arătat că șirul de funcții $\{\varphi_n\}$ converge uniform către φ ; dacă da, Teorema 3.1.15 va implica atunci că $\varphi \in C^0[a, b]$.

Afirmăm că $n \geq N$ (același N ca mai sus, n fix) implică faptul că

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon \quad \text{for all } x \in [a, b].$$

Pentru aceasta, se alege $m \geq N$ suficient de mare (depinzând de x) cu $|\varphi(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon/2$. Rezultă

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| &\leq |\varphi(x) - \varphi_m(x)| + |\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|\varphi_m - \varphi_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Cum $x \in [a, b]$ a fost arbitrar, rezultă că $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$. $\square$

EXEMPLUL 3.1.17. Fie $C^1[a, b]$ spațiul vectorial al tuturor funcțiilor cu valori reale, derivabile cu derivate continue pe $[a, b]$, cu operațiile lui $C^0[a, b]$, dar cu „ C -norma” definită de

$$\|\varphi\| = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| + \max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)|, \quad \varphi \in C^1[a, b].$$

Se verifică simplu că aceasta definește o normă pe $C^1[a, b]$ (analog cu demonstrația de la norma supremum).

În continuare va trebui să știm că spațiul vectorial normat $C^1[a, b]$ este complet. Pentru a demonstra acest lucru, avem nevoie de un rezultat privind derivarea limitei uniforme a unui șir de funcții din $C^1[a, b]$. Să presupunem că șirul $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge (la punct) către f și că șirul derivatelor $\{f'_n\}_{n \geq 1}$ converge către g . Am dori să știm dacă $f' = g$. Adică ne întrebăm dacă

$$f' = D \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (Df_n) = g,$$

o problemă de „interschimb de limite”. Următoarea teoremă afirmă că acest schimb de limite este valabil, cu condiția ca convergența șirului de derivate să fie și ea uniformă.

TEOREMA 3.1.18. *Fie $\{f_n\}_{n \geq 1}$ un șir de funcții $C^1[a, b]$, convergând (într-un singur punct) la f . Să presupunem că $\{f'_n\}_{n \geq 1}$ converge uniform către o funcție g . Atunci $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniform către f , iar f este derivabilă, cu $f' = g$.*

DEMONSTRAȚIE. Din Teorema Leibniz-Newton

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n,$$

pentru fiecare n și fiecare $x \in [a, b]$. Din aceasta și din integrarea termen cu termen a unui șir uniform convergent de funcții continue) se obține

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n, \\ f(x) &= f(a) + \int_a^x g. \end{aligned}$$

O altă aplicare a teoremei fundamentale dă $f' = g$.

Pentru a deduce că $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniform la f , se observă

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_a^x f'_n - \int_a^x g \right| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \int_a^x |f'_n - g| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq (b-a) \|f'_n - g\|_0 + |f_n(a) - f(a)|. \end{aligned}$$

Convergența uniformă a șirului $\{f_n\}_{n \geq 1}$ rezultă așadar din aceea a șirului $\{f'_n\}_{n \geq 1}$. $\square$

COROLARUL 3.1.19. $C^1[a, b]$ este complet.

DEMONSTRAȚIE. Fie $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ șir Cauchy de elemente din $C^1[a, b]$. Cum

$$\max_{x \in [a, b]} |\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| \leq \|\varphi_m - \varphi_n\| \quad (C^1\text{-norm})$$

se vede că $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ este un șir uniform Cauchy de funcții continue. Din Corolarul 3.1.16 rezultă că $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ converge uniform către o funcție continuă $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

În mod similar,

$$\max_{x \in [a, b]} |\varphi'_m(x) - \varphi'_n(x)| \leq \|\varphi_m - \varphi_n\| \quad \text{-norma-} (C^1),$$

deci rezultă, în același mod din Corolarul 3.1.16, că $\{\varphi'_n\}_{n \geq 1}$ converge uniform la o funcție continuă $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Acum Teorema 1.4 implică că φ este diferențiabilă cu $\varphi' = \psi$, deci $\varphi \in C^1[a, b]$. Dar

$$\max_{x \in [a, b]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = \|\varphi_n - \varphi\|_0,$$

$$\max_{x \in [a, b]} |\varphi'_n(x) - \varphi'(x)| = \|\varphi'_n - \varphi'\|_0,$$

convergența uniformă a șirurilor $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ și $\{\varphi'_n\}_{n \geq 1}$ implică faptul că șirul $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ converge către φ în raport cu C^1 -norma lui $C^1[a, b]$. Astfel, fiecare șir Cauchy din $C^1[a, b]$ este convergent. $\square$

EXEMPLUL 3.1.20. Fie $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ spațiul vectorial al tuturor drumurilor de clasă C^1 din $\mathbb{R}^n$ (aplicații $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, de clasă C^1), cu norma

$$\|\varphi\| = |\varphi|_0 + |\varphi'|_0,$$

unde $|\cdot|_0$ este norma supremum pe $\mathbb{R}^n$.

Apoi rezultă, dintr-o aplicare pe coordonate a Corolarului 3.1.19, că spațiul vectorial normat $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ este complet.

3.2. Funcționale liniare continue pe spații normate

În această secțiune se discută conceptele de liniaritate și continuitate pentru funcțiile de la un spațiu vectorial normat la altul.

DEFINIȚIA 3.2.1. Fie E și F spații vectoriale. Aplicația $\varphi : E \rightarrow F$ se numește *liniară* dacă

$$\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y), \quad \forall x, y \in E, a, b \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLUL 3.2.2. Funcționala $I : C^0[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definită pe spațiul vectorial al tuturor funcțiilor continue de pe $[a, b]$ prin

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

este în mod clar liniară de la $C^0[a, b]$ la $\mathbb{R}$.

Pentru spațiile vectoriale normate E și F , se poate vorbi de limite (pentru funcții de la E la F):

DEFINIȚIA 3.2.3. Se consideră aplicația $f : E \rightarrow F$ și $x_0 \in E$.

(i). se spune că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in F$$

dacă, dat $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(ii). Aplicația f este continuă la $x_0 \in E$ dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

OBSERVAȚIA 3.2.4. Se știe că fiecare aplicație liniară între spațiile euclidiene este continuă; totuși, pentru aplicațiile între spații vectoriale normate cu dimensiuni infinite, liniaritatea nu implică, în general, continuitate.

EXEMPLUL 3.2.5. Fie $V = C^0[0, 1]$ spațiul vectorial al tuturor funcțiilor continue cu valori reale definite pe $[0, 1]$. Fie E_1 spațiul normat V cu norma $\|\cdot\|_1$ și fie E_0 spațiul normat V cu norma $\|\cdot\|_0$. Se consideră operatorul identitate $\lambda : V \rightarrow V$ ca funcție de la E_1 la E_0 ,

$$\lambda : E_1 \rightarrow E_0.$$

Se pune întrebarea dacă λ este continuu în $0 \in E_1$ (funcția constantă zero pe $[0, 1]$). Dacă ar fi, atunci, dat $\varepsilon > 0$, ar exista $\delta > 0$ astfel încât

$$\|\varphi\|_1 < \delta \Rightarrow \|\varphi\|_0 < \varepsilon$$

Din Secțiunea anterioară rezultă că, pentru $\delta > 0$, există o funcție $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât

$$\|\varphi\|_1 < \delta, \quad \|\varphi\|_0 = 1.$$

Rezultă că $\lambda : E_1 \rightarrow E_0$ nu este continuu în $0 \in E_1$.

Următoarea teoremă oferă un criteriu pentru continuitatea funcționalelor liniare.

TEOREMA 3.2.6. *Fie $L : E \rightarrow F$ un operator liniar, unde E și F sunt spații vectoriale normate. Atunci următoarele trei condiții pentru L sunt echivalente:*

- (a) *Există un număr $c > 0$ astfel încât $|L(v)| \leq c|v|$ pentru toți $v \in E$.*
- (b) *L este continuu (peste tot).*
- (c) *L este continuu în $0 \in E$.*

DEMONSTRAȚIE. "(a) $\Rightarrow$ (b)". Se presupune că (a) este adevărată. Cum $x_0 \in E$ și $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{c} &\Rightarrow |L(x) - L(x_0)| = |L(x - x_0)| \\ &\leq c|x - x_0| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

deci rezultă implicația dorită.

"(a) $\Rightarrow$ (b)" este trivială.

"(c) $\Rightarrow$ (a)". Se presupune că L este continuu în 0 și se alege $\delta > 0$ astfel încât $|x| \leq \delta$ implică $|L(x)| < 1$. Apoi, pentru $v \neq 0 \in E$, rezultă că

$$\begin{aligned} |L(v)| &= L\left(\frac{|v|}{\delta} \cdot \frac{\delta}{|v|}v\right) \\ &= \frac{|v|}{\delta} L\left(\frac{\delta}{|v|}v\right) \quad \left(\text{se consideră } x = \frac{\delta}{|v|}v\right) \\ &< \frac{1}{\delta}|v|, \end{aligned}$$

deci se poate lua $c = 1/\delta$. □

EXEMPLUL 3.2.7. Fie E_0 și E_1 spațiile vectoriale normate din Exemplul 3.2.5, dar de data aceasta se va considera operatorul identitate pe spațiul lor vectorial comun V ca o aplicație liniară de la E_0 la E_1 ,

$$\mu : E_0 \rightarrow E_1.$$

Cum

$$\|\varphi\|_1 = \int_0^1 |\varphi(t)| dt \leq \max_{t \in [0,1]} |\varphi(t)| = \|\varphi\|_0,$$

din Teorema 3.2.6 (cu $c = 1$) rezultă că μ este continuu.

OBSERVAȚIA 3.2.8. Astfel, inversul unei operator liniar continuu și bijectiv definit pe un spațiu vectorial normat cu valori în altul nu este obligatoriu să fie continuu.

DEFINIȚIA 3.2.9. Fie $L : E \rightarrow F$ operator liniar care este injectiv, cât și surjectiv (adică $L(E) = F$). L se va numi *izomorfism (al spațiilor vectoriale normate E și F)* dacă și numai dacă atât L cât și L^{-1} sunt continue.

EXEMPLUL 3.2.10. Fie $A, B : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ drumuri continue în $\mathbb{R}^n$ și se consideră funcționala liniară

$$L : C^1([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R},$$

definită prin

$$L(\varphi) = \int_a^b [A(t) \cdot \varphi(t) + B(t) \cdot \varphi'(t)] dt,$$

unde punctul indică produsul scalar euclidian pe $\mathbb{R}^n$. Din inegalitatea Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |L(\varphi)| &= \left| \int_a^b [A(t) \cdot \varphi(t) + B(t) \cdot \varphi'(t)] dt \right| \\ &\leq \int_a^b (|A(t)| |\varphi(t)| + |B(t)| |\varphi'(t)|) dt \\ &\leq (b-a) (\|A\|_0 + \|B\|_0) \|\varphi\|_1 \end{aligned}$$

deci, cu Teorema 3.2.6 (cu $c = (b-a) (\|A\|_0 + \|B\|_0)$), L este continuu.

3.3. Diferențiabilitate pe spații vectoriale normate

Suntem în măsură să discutăm diferențiabilitatea funcțiilor pe spații vectoriale normate. Definiția diferențiabilității, pentru aplicațiile pe spații vectoriale normate, este aceeași cu definiția de pe spații euclidiene, cu excepția faptului că trebuie explicit ca aplicația liniară de aproximare să fie continuă.

DEFINIȚIA 3.3.1. Aplicația $f : E \rightarrow F$ (E și F spații normate) este *diferențiabilă* în $x \in E$ dacă și numai dacă există un operator liniar și continuu $L : E \rightarrow F$ astfel încât

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{|h|} = 0.$$

OBSERVAȚIA 3.3.2. (i). Operatorul liniar și continuu L , dacă există, este unic.

(ii). Se verifică ușor că un operator liniar L care satisface definiția anterioară este continuu în 0 dacă și numai dacă f este continuu în orice $x \in E$.

(iii). Dacă $f : E \rightarrow F$ este diferențiabilă în $x \in E$, atunci operatorul liniar continuu din definiția anterioară se numește *diferențiala lui f în x* și se notează cu $df_x : E \rightarrow F$.

(iv). În cazul dimensiunilor finite, $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, matricea $m \times n$ asociată lui df_x în bazele canonice ale lui $\mathbb{R}^n$ și $\mathbb{R}^m$, este chiar jacobiana $J_f(x)$. În această lucrare sunt studiate în principal aplicațiile între spații cu dimensiuni infinite, ale căror diferențiale nu sunt reprezentabile prin matrice, astfel încât derivatele nu vor fi disponibile.

EXEMPLUL 3.3.3. Dacă $f : E \rightarrow F$ operator liniar continuu, atunci

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f(h)}{|h|} = 0, \quad x, h \in E, \quad h \neq 0,$$

deci f diferențiabilă în x , cu $df_x = f$. Deci, un operator liniar continuu este propria sa diferențială (în orice punct $x \in E$).

EXEMPLUL 3.3.4. Se va da un calcul mai puțin trivial al unei diferențiale. Fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 . Se definește

$$f : C^0[a, b] \rightarrow C^0[a, b], \quad f(\varphi) = g \circ \varphi.$$

Se va deduce că f este diferențiabilă și se va calcula diferența sa.

Dacă f este diferențiabilă în $\varphi \in C^0[a, b]$, atunci $df_\varphi(h)$ ar trebui să fie partea liniară (în $h \in C^0[a, b]$) din $f(\varphi + h) - f(\varphi)$. Pentru a investiga această diferență, se consideră dezvoltarea în serie Taylor de gradul doi a lui g în $\varphi(t)$:

$$g(\varphi(t) + h(t)) - g(\varphi(t)) = g'(\varphi(t))h(t) + R(h)(t),$$

unde

$$(3.3.1) \quad R(h)(t) = \frac{1}{2}g''(\xi(t))(h(t))^2,$$

pentru $\xi(t)$ între $\varphi(t)$ și $\varphi(t) + h(t)$. Apoi

$$f(\varphi + h) - f(\varphi) = L(h) + R(h),$$

unde $L(h) \in C^0[a, b]$ este definit de

$$L(h)(t) = g'(\varphi(t))h(t).$$

Este clar că $L : C^0[a, b] \rightarrow C^0[a, b]$ este operator liniar continuu, deci pentru a demonstra că f este diferențiabilă în φ cu $df_\varphi = L$, este suficient a deduce că

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|_0} = 0.$$

Deoarece g este o funcție de clasă C^2 , există $M > 0$ astfel încât $|g''(\xi(t))| < 2M$ când $\|h\|_0$ este suficient de mic (din mărghinirea derivatei a doua, cu Teorema lui Weierstrass de mărghinire a funcțiilor continue definite pe compacte). Apoi rezultă din (3.3.1) că

$$(3.3.2) \quad \frac{|R(h)(t)|}{\|h\|_0} < \frac{M|h(t)|^2}{\|h\|_0} \leq M\|h\|_0,$$

și aceasta implică (3.3.2). Astfel diferența $df_\varphi : C^0[a, b] \rightarrow C^0[a, b]$ a lui f la φ este definită de

$$df_\varphi(h)(t) = g'(\varphi(t))h(t).$$

"Regula lanțului" pentru aplicațiile definite pe spații vectoriale normate ia forma așteptată:

TEOREMA 3.3.5. *Fie U și V submulțimi deschise ale spațiilor vectoriale normate E și respectiv F . Dacă aplicațiile $f : U \rightarrow F$ și $g : V \rightarrow G$ (G fiind un al treilea spațiu vectorial normat) sunt diferențiabile în $x \in U$ și, respectiv, $f(x) \in V$, atunci compunerea lor $h = g \circ f$ este diferențiabilă în x , și*

$$dh_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

Demonstrația este identică cu cea a "regulii lanțului" pe cazul finit dimensional și nu se va repeta.

Există un caz în care derivatele (mai degrabă decât diferențialele) sunt importante:

DEFINIȚIA 3.3.6. Fie $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow E$ un drum în spațiul vectorial normat E . Limita

$$\varphi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \in E,$$

dacă există, este *derivata* sau *vectorul viteză* al lui φ în t .

OBSERVAȚIA 3.3.7. Se verifică cu ușurință că $\varphi'(t)$ există dacă și numai dacă φ este diferențiabilă în t , caz în care $d\varphi_t(h) = \varphi'(t)h$ (din nou, la fel ca în cazul finit dimensional).

În următorul capitol se va studia problema minimizării (sau maximizării) unei funcții diferențiabile cu valori reale $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ definită pe o submulțime M a spațiului vectorial normat E . Pentru a formula rezultatul care va juca rolul pe care îl are Teorema lui Fermat în problemele de maxim-minim finit dimensionale, este nevoie de conceptul de mulțime tangentă.

DEFINIȚIA 3.3.8. Se consideră o submulțime M a spațiului vectorial normat E . *Mulțimea tangentă TM_x a lui M în punctul $x \in M$* este mulțimea tuturor acelor vectori $v \in E$, pentru care există un drum diferențiabil $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M \subset E$ astfel încât $\varphi(0) = x$ și $\varphi'(0) = v$.

OBSERVAȚIA 3.3.9. TM_x este pur și simplu mulțimea tuturor vectorilor viteză în x ai drumurilor diferențiabile din M care trec prin x .

Următoarea teoremă oferă o condiție necesară pentru maximele locale sau minimele locale (se va da doar pentru minime).

TEOREMA 3.3.10. *Fie funcția $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă în punctul x al submulțimii M a spațiului vectorial normat E . Dacă $f(v) \geq f(x)$ pentru toți $v \in M$ suficient de aproape de x , atunci*

$$df_x|_{TM_x} = 0,$$

i.e. $df_x(v) = 0$ pentru toți $v \in TM_x$.

DEMONSTRAȚIE. Pentru $v \in TM_x$, fie $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M$ un drum diferențiabil în E astfel încât $\varphi(0) = x$ și $\varphi'(0) = v$. Atunci compunerea $g = f \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are un minim local în 0, deci, cu Teorema lui Fermat, $g'(0) = 0$. Prin urmare, regula lanțului dă

$$\begin{aligned} 0 = g'(0) &= dg_0(1) = df_{\varphi(0)}(d\varphi_0(1)) \\ &= df_x(\varphi'(0)), \\ 0 &= df_x(v) \end{aligned}$$

așa cum se dorește. □

3.4. "Teorema funcțiilor implicite" pe spații vectoriale normate complete

În capitolul următor vom avea nevoie de "Teorema funcțiilor implicite" pentru aplicații definite pe spații vectoriale normate complete. Atât enunțul, cât și demonstrația sa, în acest context mai general, sunt în esență aceleași cu cele ale "Teoremei funcțiilor implicite" din cazul finit dimensional.

Pentru a o enunța, trebuie definite derivatele parțiale ale unei aplicații diferențiabile care este definită pe produsul a două spații vectoriale normate E și F .

OBSERVAȚIA 3.4.1. Fie două spații vectoriale normate E și F .

Produsul cartezian $E \times F$ este organizat ca spațiu vectorial prin definirea operațiilor:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{și} \quad a(x, y) = (ax, ay).$$

Dacă $\|\cdot\|_E$ și $\|\cdot\|_F$ sunt normele pe E și, respectiv, F , atunci se va defini

$$|(x, y)| = \max(|x|_E, |y|_F),$$

care definește o normă pe $E \times F$, iar $E \times F$ este completă dacă atât E cât și F sunt complete (lucru știut). De exemplu, dacă $E = F = \mathbb{R}$ cu norma euclidiană, atunci această definiție dă norma supremum pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (as se vedea Exemplul 3.1.3).

Dacă aplicația

$$f : E \times F \rightarrow G$$

este diferențiabilă în punctul $(a, b) \in E \times F$, rezultă simplu că și aplicațiile

$$\varphi : E \rightarrow G \quad \text{și} \quad \psi : F \rightarrow G,$$

definite de

$$\varphi(x) = f(x, b) \quad \text{și} \quad \psi(y) = f(a, y),$$

sunt diferențiabile în $a \in E$ și, respectiv, $b \in F$. Atunci $d_x f_{(a,b)}$ și $d_y f_{(a,b)}$, diferențialele parțiale ale lui f în (a, b) , în raport cu $x \in E$ respectiv $y \in F$ sunt definite de

$$d_x f_{(a,b)} = d\varphi_a \quad \text{și} \quad d_y f_{(a,b)} = d\psi_b.$$

Astfel, $d_x f_{(a,b)}$ este diferențiala aplicației $E \rightarrow G$ obținută din $f : E \times F \rightarrow G$ fixând $y = b$ și $d_y f_{(a,b)}$ se obține în mod similar fixând x . Acest lucru generalizează definiția derivatelor parțiale ale unei aplicații de la $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^k$.

Cu această notatie și terminologie, enunțul "Teoremei funcțiilor implicite" este:

TEOREMA 3.4.2 ("Teorema funcțiilor implicite"). *Fie $f : E \times F \rightarrow G$ o aplicație de clasă C^1 , unde E, F și G sunt spații vectoriale normate complete. Să presupunem că $f(a, b) = 0$ și că*

$$d_y f_{(a,b)} : F \rightarrow G$$

este un izomorfism. Atunci există o vecinătate U a lui a în E , o vecinătate W a lui (a, b) în $E \times F$ și o aplicație C^1 $\varphi : U \rightarrow F$ astfel încât să fie adevărată următoarea: dacă $(x, y) \in W$ și $x \in U$, atunci $f(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $y = \varphi(x)$.

OBSERVAȚIA 3.4.3. (i). Enunțul de mai sus se referă la aplicații de clasă C^1 de la un spațiu vectorial normat la altul, definindu-se doar cele diferențiabile. Aplicația $g : E \rightarrow F$ definită pe spațiul vectoriale normate se numește *de clasă C^1* , dacă este diferențiabilă și $dg_x(v)$ este o funcție continuă în variabila (x, v) , adică aplicația $(x, y) \rightarrow dg_x(v)$ de la $E \times E$ la F este continuă.

(ii). Demonstrația "Teoremei funcțiilor implicite" pe spații vectoriale normate complete este în esență aceeași cu demonstrația ei în cazul finit dimensional (unde s-a aplicat "Teorema de inversare locală"). În particular, rezultă că "Teorema de inversare locală" pentru spații vectoriale normate complete este analoagă "Teoremei de inversare locală" pe cazul finit dimensional (cu excepția faptului că spațiul euclidian $\mathbb{R}^n$ este înlocuit cu un spațiu vectorial normat complet E , dar folosind și "Principiul contracției"; singura proprietate a lui $\mathbb{R}^n$ care a fost folosită în demonstrația "Principiului contracției", este că este spațiu complet.

CAPITOLUL 4

Calcul variațional

Calculul variațional tratează o anumită clasă de probleme maxim-minim, care au în comun faptul că fiecare dintre ele este asociată cu un anumit fel de expresie integrală. În prima secțiune se discută un prim cel mai elementar exemplu de problemă de calcul variațional. În Secțiunea 4.2 se va arăta că, dacă $\varphi \in C^1[a, b]$ maximizează (sau minimizează) funcția $F : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definită de $F(\psi) = \int_a^b f(\psi(t), \psi'(t), t) dt$, cu condițiile $\varphi(a) = \alpha$ și $\varphi(b) = \beta$, atunci φ satisface ecuația Euler-Lagrange $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) = 0$. Demonstrația acestui lucru va implica o versiune generalizată a tehnicii familiare de „setare derivată egală cu zero și apoi determinarea necunoscutei”. Este discutată și problema „brahistocronei” și cea a unor geodezice.

În Secțiunea 4.3 se discută așa-numita „problema izoperimetrică”, în care se dorește maximizarea sau minimizarea aplicației mai sus amintite F , supusă condițiilor $\psi(a) = \alpha, \psi(b) = \beta$ și „legăturilor” $G(\psi) = \int_a^b g(\psi(t), \psi'(t), t) dt = c$. Aici f și g sunt funcții de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^3$; se va deduce că, dacă $\varphi \in C^1[a, b]$ este o soluție pentru această problemă, atunci există un număr $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât φ satisface ecuația Euler-Lagrange $\frac{\partial h}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) = 0$, pentru funcția $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $h(x, y, t) = f(x, y, t) - \lambda g(x, y, t)$. Contextul seamănă cu problemele de extreme cu legături standard, iar demonstrarea ei va implica o generalizare a metodei multiplicatorilor Lagrange care a fost folosită acolo. Pentru aceste metode generale maxim-minim, se vor utiliza metodele de „calcul în spații vectoriale normate” din capitolul anterior.

În ultima secțiune se discută pe scurt probleme analoge celor din secțiunile anterioare asociate cu o integrală multiplă al cărei integrand este o funcție „necunoscută” de mai multe variabile. Pentru $f : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, se caută maximizarea sau minimizarea unei funcții $F(\psi) = \int_D f\left(x_1, \dots, x_n, \psi(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right) d\mathbf{x}$, cu $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ funcție de clasă C^1 egală cu o funcție fixă dată $\psi_0 : D \rightarrow \mathbb{R}$ pe frontiera ∂D a lui D . Aplicația F se poate rescrie $F(\psi) = \int_D f(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}), \nabla \psi(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$, unde $\nabla \psi(\mathbf{x})$ este vectorul gradient $\nabla \psi(\mathbf{x}) = (D_1 \psi(\mathbf{x}), \dots, D_n \psi(\mathbf{x}))$. Aici se vor utiliza numeroase concepte și rezultate din capitolul al doilea (conceptul de varietate, varietate compactă cu bord, suprafață k -dimensională în $\mathbb{R}^n$ și aria sa, sau formula lui Stokes). Este discutată și problema suprafețelor minimale și a membranei vibrante.

Sursa bibliografică utilizată este [2].

4.1. Preliminarii

Cel mai simplu exemplu de problemă de calcul variațional este următorul: se consideră $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 și se notează prin $C^1[a, b]$ mulțimea tuturor funcțiilor de clasă C^1 definite pe intervalul $[a, b]$. Pentru $\psi \in C^1[a, b]$, se

definește $F(\psi) \in \mathbb{R}$ prin

$$F(\psi) = \int_a^b f(\psi(t), \psi'(t), t) dt.$$

Atunci F este o funcție din $C^1[a, b]$. Problema este atunci să găsim acel element $\varphi \in C^1[a, b]$, dacă există, la care funcția $F : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ își atinge valoarea maximă (sau minimă), cu condiția ca φ să aibă valorile $\varphi(a) = \alpha$ și $\varphi(b) = \beta$ la capetele lui $[a, b]$.

De exemplu, dacă vrem să găsim funcția de clasă C^1 $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ al cărei grafic $x = \psi(t)$ (în planul $t - x$, a se vedea Figura 4.1.1) unește punctele (a, α) și (b, β) și are lungime minimă, atunci dorim să minimizăm funcția $F : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$F(\psi) = \int_a^b [1 + (\psi'(t))^2]^{1/2} dt.$$

Aici funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin $f(x, y, t) = \sqrt{1 + y^2}$.

A se nota că în problema de mai sus „necunoscută” este o funcție $\varphi \in C^1[a, b]$, mai degrabă decât un punct în $\mathbb{R}^n$ (ca în probleme maxim-minim elementare). Spațiul de funcții $C^1[a, b]$, este, ca și $\mathbb{R}^n$, un spațiu vectorial, deși unul infinit-dimensional. Scopul acestui studiu este de a generaliza în mod corespunzător metodele finite-dimensionale cunoscute pentru calculul diferențial clasic, astfel încât să trateze unele dintre problemele standard ale calculului variațional.

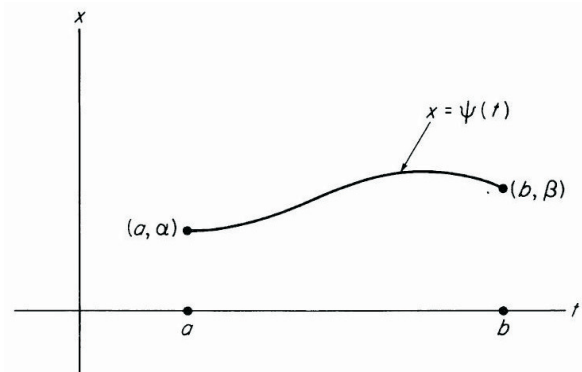


FIGURA 4.1.1. Funcția (de clasă C^1) $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ al cărei grafic unește (a, α) și (b, β) și are lungime minimă

4.2. Cea mai simplă problemă variațională

Sunt acum puse bazele pentru a discuta prima problemă menționată în introducerea acestui capitol:

- se dă $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$;
- se caută să se minimizăm (sau maximizeze) funcția $F : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definită de

$$(4.2.1) \quad F(\psi) = \int_a^b f(\psi(t), \psi'(t), t) dt,$$

– printre acele funcții $\psi \in C^1[a, b]$ astfel încât $\psi(a) = \alpha$ și $\psi(b) = \beta$ (unde α și β sunt numere reale fixate).

Se consideră M submulțimea lui $C^1[a, b]$ constând din acele funcții ψ care îndeplinesc condițiile $\psi(a) = \alpha$ și $\psi(b) = \beta$. Atunci suntem interesați de extremele locale ale F pe submulțimea M . Dacă F este diferentiabilă în $\varphi \in M$, iar $F|_M$ are un extrem local în φ , atunci Teorema 3.3.10 dă

$$(4.2.2) \quad dF_{\varphi|TM_{\varphi}} = 0.$$

Vom spune că funcția $\varphi \in M$ este un *punct extremal pentru F pe M* dacă îndeplinește condiția necesară (4.2.2). Nu vom lua în considerare aici problema dificilă a găsirii unor condiții suficiente în care un punct extremal produce de fapt un extrem local.

Pentru a putea stabili dacă o funcție dată $\varphi \in M$ este sau nu un punct extremal pentru F pe M , adică dacă (sau nu) nu $dF_{\varphi|TM_{\varphi}} = 0$, trebuie (în condiții adecvate pe f) să calculăm explicit diferențiala dF_{φ} a lui F în φ și trebuie să determinăm exact care este mulțimea tangentă TM_{φ} a lui M în φ .

Ultima problemă este destul de ușoară. Mai întâi se alege un element fix $\varphi_0 \in M$. Apoi, având în vedere orice $\varphi \in M$, diferența $\varphi - \varphi_0$ este un element al subspațiului

$$C_0^1[a, b] = \{\psi \in C^1[a, b] : \psi(a) = \psi(b) = 0\}$$

al lui $C^1[a, b]$, constând din acele funcții C^1 pe $[a, b]$ care sunt nule în ambele puncte finale. În schimb, dacă $\psi \in C_0^1[a, b]$, atunci clar $\varphi_0 + \psi \in M$. Astfel M este un hiperplan în $C^1[a, b]$, și anume translația cu φ_0 a subspațiului $C_0^1[a, b]$. Dar mulțimea tangentă a unui hiperplan este, în fiecare punct, pur și simplu subspațiul a cărui translație este. Prin urmare

$$(3) \quad TM_{\varphi} = C_0^1[a, b]$$

pentru fiecare $\varphi \in M$.

Următoarea teoremă oferă calculul lui dF_{φ} .

TEOREMA 4.2.1. *Fie $F : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definit prin (4.2.1), cu $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funcție de clasă C^2 . Atunci F este diferentiabilă cu*

$$(4.2.3) \quad dF_{\varphi}(h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) h(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) h'(t) \right] dt,$$

pentru oricare $\varphi, h \in C^1[a, b]$.

În utilizarea notației derivatei parțiale din partea dreaptă a lui (4.2.3), se gândește la $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$.

DEMONSTRAȚIE. Dacă F este diferentiabilă în $\varphi \in C^1[a, b]$, atunci $dF_{\varphi}(h)$ ar trebui să fie partea liniară (în h) a lui $F(\varphi + h) - F(\varphi)$. Pentru a investiga această diferență, notăm dezvoltarea Taylor de gradul doi a lui f în punctul $(\varphi(t), \varphi'(t), t) \in \mathbb{R}^3$:

$$(4.2.4) \quad f(\varphi(t) + h(t), \varphi'(t) + h'(t), t) - f(\varphi(t), \varphi'(t), t)$$

$$(4.2.5) \quad = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) h(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) h'(t) + r(h(t)),$$

unde

$$r(h(t)) = \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi(t)) (h(t))^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi(t)) h(t) h'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi(t)) (h'(t))^2 \right]$$

pentru un anumit punct $\xi(t)$ al segmentului de dreaptă în $\mathbb{R}^3$ de la $(\varphi(t), \varphi'(t), t)$ la $(\varphi(t) + h(t), \varphi'(t) + h'(t), t)$. Dacă B este o bilă în $\mathbb{R}^3$ care conține în interiorul ei imaginea drumului $t \rightarrow (\varphi(t), \varphi'(t), t)$, $t \in [a, b]$ și M este maximul valorilor absolute ale derivatelor parțiale de ordinul doi ale lui f în puncte din B , atunci rezultă cu ușurință că

$$(4.2.6) \quad |r(h(t))| \leq \frac{M}{2} (|h(t)| + |h'(t)|)^2,$$

pentru toți $t \in [a, b]$, dacă $\|h\|_0$ este suficient de mic.

Din (4.2.4) se obține

$$\begin{aligned} F(\varphi + h) - F(\varphi) &= L(h) + R(h), \\ L(h) &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) h(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) h'(t) \right] dt, \\ R(h) &= \int_a^b r(h(t)) dt. \end{aligned}$$

Pentru a demonstra că F este diferențiabilă în φ cu $dF_\varphi = L$ după cum se dorește, este suficient să conchidem că $L : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție liniară continuă (prin Exemplul 3.2.10) și apoi să se arate că

$$(4.2.7) \quad \lim_{\|h\|_1 \rightarrow 0} \frac{|R(h)|}{\|h\|_1} = 0.$$

Dar din (4.2.6) rezultă imediat că

$$|R(h)| \leq \int_a^b |r(h(t))| dt \leq \int_a^b \frac{M}{2} (2\|h\|_1)^2 dt = 2M(b-a) (\|h\|_1)^2,$$

iar aceasta implică (4.2.7). $\square$

În ceea ce privește condiția (4.2.2), este de interes valoarea lui $dF_\varphi(h)$ când $h \in TM_\varphi = C_0^1[a, b]$.

COROLARUL 4.2.2. *Se presupune, pe lângă ipotezele Teoremei 4.2.1, că φ este o funcție C^2 și că $h \in C_0^1[a, b]$. Atunci*

$$(4.2.8) \quad dF_\varphi(h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) \right] h(t) dt.$$

DEMONSTRAȚIE. Dacă φ este o funcție C^2 pe $[a, b]$, atunci

$$[a, b] \ni t \rightarrow \partial f / \partial y(\varphi(t), \varphi'(t), t)$$

este o funcție de clasă C^1 . Integrând prin părți, rezultă

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) h'(t) dt \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) h(t) \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) \right) h(t) dt \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) \right) h(t) dt \end{aligned}$$

deoarece $h(a) = h(b) = 0$. Astfel formula (4.2.8) reiese din formula (4.2.3) în acest caz. $\square$

OBSERVAȚIA 4.2.3. Acest corolar arată că funcția de clasă C^2 $\varphi \in M$ este un punct extremal pentru F pe M dacă și numai dacă

$$(4.2.9) \quad \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) \right] h(t) dt = 0,$$

pentru fiecare funcție h de clasă C^1 pe $[a, b]$ astfel încât $h(a) = h(b) = 0$.

Următoarea leamnă verifică presupunerea naturală că (4.2.9) poate fi valabilă pentru astfel de funcții h numai dacă funcția dintre paranteze în (4.2.9) se anulează pe $[a, b]$.

LEMA 4.2.4. Dacă $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă astfel încât

$$\int_a^b \varphi(t) h(t) dt = 0$$

pentru fiecare $h \in C_0^1[a, b]$, atunci φ este identic zero pe $[a, b]$.

DEMONSTRAȚIE. Se presupune că $\varphi(t_0) \neq 0$ pentru unele $t_0 \in [a, b]$. Apoi, prin continuitate, φ este diferit de zero pe un interval care conține t_0 , să zicem, $\varphi(t) > 0$ pentru $t \in [t_1, t_2] \subset [a, b]$. Dacă h este definit pe $[a, b]$ prin

$$h(t) = \begin{cases} (t - t_1)^2 (t - t_2)^2, & \text{dacă } t \in [t_1, t_2], \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases}$$

atunci $h \in C_0^1[a, b]$ și

$$\int_a^b \varphi(t) h(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 dt > 0,$$

deoarece integrandul este pozitiv cu excepția punctelor finale t_1 și t_2 (Figura 4.2.1). Această contradicție demonstrează că $\varphi \equiv 0$ pe $[a, b]$.

Condiția fundamentală de necesitate pentru extremali, ecuația Euler-Lagrange, decurge imediat din Corolarul 4.2.2 și Lema 4.2.4. $\square$

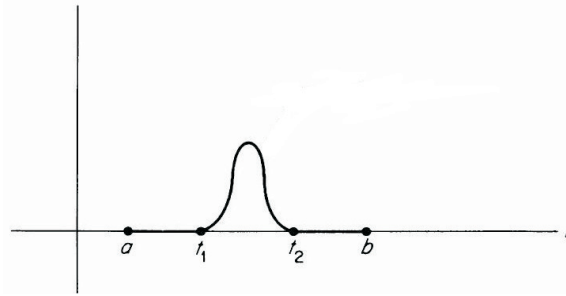


FIGURA 4.2.1. Graficul lui h

TEOREMA 4.2.5. Fie $F : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definit prin (1), cu $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ fiind o funcție C^2 . Atunci funcția C^2 $\varphi \in M$ este un punct extremal pentru F pe $M = \{\psi \in C^1[a, b] : \psi(a) = \alpha \text{ și } \psi(b) = \beta\}$ dacă și numai dacă

$$(10) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) = 0$$

pentru oricare $t \in [a, b]$.

OBSERVAȚIA 4.2.6. (i). Ecuația (10) este ecuația Euler-Lagrange pentru extrema φ ; este de fapt o ecuație diferențială de ordinul doi (obișnuită) în φ , deoarece regula lanțului dă

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \varphi' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \varphi'' + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y},$$

unde derivatele parțiale ale lui f sunt evaluate în $(\varphi(t), \varphi'(t), t) \in \mathbb{R}^3$.

(ii). Ipoteza din Teorema 4.2.5 că punctul extremal φ este o funcție de clasă C^2 (mai degrabă decât doar de clasă C^1) este de fapt inutilă. În primul rând, dacă φ este un punct extremal care se presupune că este doar C^1 , atunci, printr-o analiză mai atentă, se poate demonstra că $\partial f / \partial y (\varphi(t), \varphi'(t), t)$ este o funcție derivabilă (de t) care satisface ecuația Euler-Lagrange. În al doilea rând, dacă φ este un punct extremal de clasă C^1 astfel încât

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (\varphi(t), \varphi'(t), t) \neq 0,$$

pentru toți $t \in [a, b]$, atunci se poate demonstra că φ este, de fapt, o funcție C^2 . Nu se va considera acest caz, deoarece Teorema 4.2.5, așa cum a fost menționată, cu ipoteza suplimentară că φ este C^2 , va fi suficientă în continuare.

Ilustrăm aplicațiile ecuației Euler-Lagrange cu doua prime exemple standard.

EXEMPLUL 4.2.7. Se consideră un caz special al problemei de a găsi drumul de lungime minimă care unește punctele (a, α) și (b, β) în planul $t - x$. Să presupunem în special că $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție C^2 cu $\varphi(a) = \alpha$ și $\varphi(b) = \beta$ al cărui grafic are lungime minimă, în comparație cu graficele tuturor celorlalte astfel de funcții. Atunci φ este un punct extremal (supus condițiilor punctului final) al funcției

$$F(\psi) = \int_a^b \left[1 + (\psi'(t))^2 \right]^{1/2} dt,$$

a cărui funcție integrand este

$$f(x, y, t) = (1 + y^2)^{1/2}.$$

Deoarece $\partial f / \partial x = 0$ și $\partial f / \partial y = y / (1 + y^2)^{1/2}$, ecuația Euler-Lagrange pentru φ este prin urmare

$$\frac{d}{dt} \frac{\varphi'}{\left[1 + (\varphi')^2 \right]^{1/2}} = 0,$$

care la calcul se reduce la

$$\frac{\varphi''}{\left(1 + (\varphi')^2 \right)^{3/2}} = 0.$$

Prin urmare, $\varphi'' = 0$ pe $[a, b]$, deci φ este o funcție liniară pe $[a, b]$, iar graficul său este (după cum era de așteptat) segment de linie dreaptă de la (a, α) la (b, β) .

EXEMPLUL 4.2.8. Se dorește minimizarea ariei unei suprafețe de revoluție. Să presupunem în special că $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție C^2 cu $\varphi(a) = \alpha$ și $\varphi(b) = \beta$, astfel încât suprafața obținută prin rotirea curbei $x = \varphi(t)$ în jurul axei t are o

suprafață minimă, în comparație cu toate celelalte suprafețe de revoluție obținute în acest mod (supusă condițiilor finale). Atunci φ este un punct extremal al funcției

$$F(\psi) = \int_a^b 2\pi\psi(t) \left[1 + (\psi'(t))^2\right]^{1/2} dt$$

a cărui integrand este

$$f(x, y, t) = 2\pi x (1 + y^2)^{1/2}.$$

Aici

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\pi (1 + y^2)^{1/2} \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\pi xy}{(1 + y^2)^{1/2}}$$

După înlocuirea $x = \varphi(t)$, $y = \varphi'(t)$ în ecuația Euler-Lagrange și simplificând, obținem

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y} = 2\pi \frac{1 + (\varphi')^2 - \varphi\varphi''}{\left[1 + (\varphi')^2\right]^{3/2}}.$$

Rezultă că

$$\frac{\varphi}{\left[1 + (\varphi')^2\right]^{1/2}} = c \quad (\text{constant})$$

(prin diferențierea acestei din urmă ecuații), sau

$$\varphi' = \left(\frac{\varphi^2 - c^2}{c^2} \right)^{1/2}.$$

Soluția generală a acestei ecuații de ordinul întâi este

$$(4.2.10) \quad \varphi(t) = c \cosh \frac{t+d}{c},$$

unde d este o a doua constantă. Astfel curba $x = \varphi(t)$ este o catenară (Figura 4.2.2) care trece prin punctele date (a, α) și (b, β) .

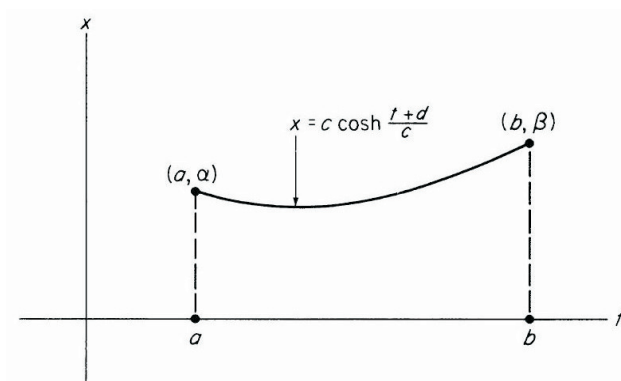


FIGURA 4.2.2. Curba $x = \varphi(t)$

Se poate demonstra că, dacă $b - a$ este suficient de mare în comparație cu α și β , atunci nicio catenară de forma (4.2.10) nu trece prin punctele date (a, α) și (b, β) , deci în acest caz nu va exista un punct extremal neted.

Cele de mai sus subliniază faptul că ecuația Euler-Lagrange oferă doar o condiție necesară ca o funcție dată φ să maximizeze sau să minimizeze funcția integrală dată F . Se poate întâmpla fie să nu existe extreme (soluții ale ecuației Euler-Lagrange care să satisfacă condițiile punctului final), fie ca un extremal dat să nu maximizeze sau să minimizeze F (la fel ca un punct critic al unei funcții pe $\mathbb{R}^n$ nu trebuie să furnizeze un maxim sau un minim).

OBSERVAȚIA 4.2.9. Toată discuția de până acum poate fi generalizată de la cazul cu valori reale la cazul cu valori vectoriale, care se obține prin înlocuirea spațiului $C^1[a, b]$ al funcțiilor cu valori reale cu spațiul $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ format cu C^1 -drumuri în $\mathbb{R}^n$. Demonstrațiile sunt toate în esență aceleași, în afară de înlocuirea notației vectoriale cu notația scalară, așa că vom prezenta doar rezultatele.

Considerând o funcție C^2 $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ne interesează extremele funcției $F : C^1([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, definite de

$$(4.2.11) \quad F(\psi) = \int_a^b f(\psi(t), \psi'(t), t) dt,$$

printre drumurile de clasă C^1 $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, astfel încât $\psi(a) = \alpha$ și $\psi(b) = \beta$, unde α și β sunt puncte în $\mathbb{R}^n$.

Notând cu M submulțimea lui $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ constând din acele drumuri care îndeplinesc condițiile punctului final, drumul $\varphi \in M$ este un punct extremal pentru F pe M dacă și numai dacă

$$dF_{\varphi|TM_{\varphi}} = 0.$$

Constatăm, ca și înainte, că M este un hiperplan. Pentru fiecare $\varphi \in M$,

$$TM_{\varphi} = C_0^1([a, b], \mathbb{R}^n) = \{\psi \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n) : \psi(a) = \psi(b) = 0\}.$$

Cu notația $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, se poate scrie

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n} \right),$$

deci $\partial f / \partial \mathbf{x}$ și $\partial f / \partial \mathbf{y}$ sunt vectori. Dacă φ este un drum de clasă C^2 în $\mathbb{R}^n$ și $h \in C_0^1([a, b], \mathbb{R}^n)$, atunci găsim (prin generalizarea demonstrațiilor Teoremei 4.2.1 și a Corolarului 4.2.2) că

$$(4.2.12) \quad dF_{\varphi}(h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\varphi(t), \varphi'(t), t) \right] \cdot h(t) dt.$$

Se compară cu ecuația (4.2.8); aici punctul indică produsul scalar euclidian în $\mathbb{R}^n$.

Printr-o versiune n -dimensională a Lemei 4.2.4, rezultă din (4.2.12) că drumul de clasă C^2 $\varphi \in M$ este un punct extremal pentru F pe M dacă și numai dacă

$$(14) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\varphi(t), \varphi'(t), t) = 0$$

Aceasta este ecuația Euler-Lagrange sub formă vectorială. Luând componente, obținem ecuațiile scalare Euler-Lagrange

$$(4.2.13) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

EXEMPLUL 4.2.10. Să presupunem că $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ este un drum C^2 de lungime minimă cu punctele finale $\alpha = \varphi(a)$ și $\beta = \varphi(b)$. Atunci φ este un punct extremal pentru funcția $F : C^1([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, definit de

$$F(\psi) = \int_a^b \left[(\psi'(t))^2 + \dots + (\psi'_n(t))^2 \right]^{1/2} dt,$$

a cărui funcție integrand este

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}.$$

Deoarece $\partial f / \partial x_i = 0$ și $\partial f / \partial y_i = y_i / (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$, ecuațiile Euler-Lagrange pentru φ dau

$$\frac{\varphi'_i(t)}{\left[(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_n(t))^2 \right]^{1/2}} = \text{constant}, \quad i = 1, \dots, n$$

Prin urmare, vectorul tangent unitar $\varphi'(t) / |\varphi'(t)|$ este constant, deci rezultă că imaginea lui φ este segmentul de dreaptă de capete α și β .

EXEMPLUL 4.2.11. Se presupune că o particulă de masă m se mișcă în câmpul de forțe $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, unde $F(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$ cu $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție "energie potențială" dată. Conform principiului lui Hamilton, drumul $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ al particulei este un punct extremal al integralei diferenței energiilor cinetice și potențiale ale particulei,

$$\int_a^b \left[\frac{1}{2} m |\varphi'(t)|^2 - V(\varphi(t)) \right] dt.$$

Se poate deduce că ecuațiile Euler-Lagrange (4.2.13) pentru această problemă se reduc la legea mișcării lui Newton

$$F(\varphi(t)) = m\varphi''(t).$$

EXEMPLUL 4.2.12. Dacă $f(x, y, t)$ este independentă de t , deci $\partial f / \partial t = 0$ și $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface ecuația Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0,$$

se poate deduce simplu că $y \partial f / \partial y - f$ este constantă, adică

$$\varphi'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - f(\varphi(t), \varphi'(t), t) = k$$

pentru oricare $t \in [a, b]$.

EXEMPLUL 4.2.13 (Brahistocrona). Se presupune că o particulă de masă m alunecă pe un fir fără frecare care conectează două puncte fixe într-un plan vertical (Figura 4.2.3). Dorim să determinăm forma $y = \varphi(x)$ a firului dacă timpul de coborâre este minim. Să luăm originea ca punct inițial, cu axa y îndreptată în jos. Viteza v a particulei este determinată de ecuația de energie $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$, de unde $v = \sqrt{2gy}$. Timpul T de coborâre de la $(0, 0)$ la (x_1, y_1) este, prin urmare, dat de

$$T = \int_0^{x_1} \frac{ds}{v} = \frac{1}{(2g)^{1/2}} \int_0^{x_1} \frac{1}{y^{1/2}} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx.$$

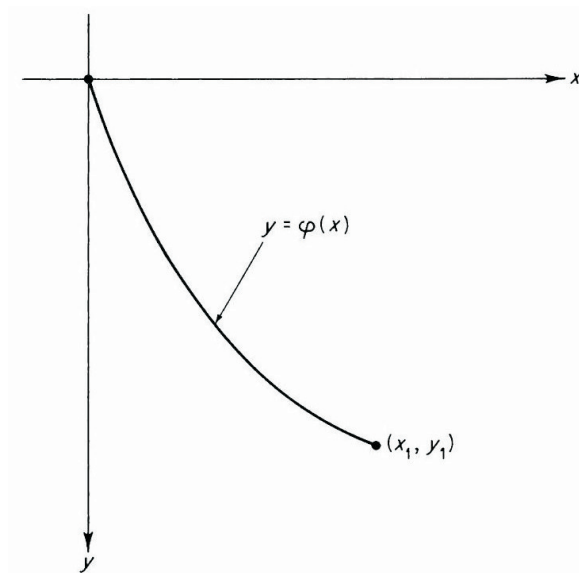


FIGURA 4.2.3. Brahistocronul

Se poate deduce că curba timpului minim de coborâre este cicloida

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta),$$

generat de mișcarea unui punct fix de pe circumferința unui cerc cu raza a care se rostogolește de-a lungul axei x [constantă a fiind determinată de condiția ca să treacă prin punctul (x_1, y_1)]. Se observă că

$$f(y, y', x) = \frac{[1 + (y')^2]^{1/2}}{y^{1/2}}$$

este independentă de x ; se aplică Exemplul anterior și

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = k = \frac{1}{(2a)^{1/2}},$$

ecuație ce se integrează ușor cu substituția $y = 2a \sin^2 \theta/2$.

OBSERVAȚIA 4.2.14 (Geodezice). În următoarele exemple se vor discuta geodezice (cele mai scurte drumuri) pe o suprafață S din $\mathbb{R}^3$. Să presupunem că S este parametrizat de $R : \mathbb{R}_{uv}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xyz}^3$ și că curba $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ este compunerea $\gamma = T \circ c$, unde $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{uv}^2$. Lungimea lui γ este

$$s(\gamma) = \int_a^b \left[E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt,$$

unde

$$E = \frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{\partial T}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{\partial T}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial T}{\partial v} \cdot \frac{\partial T}{\partial v}.$$

Pentru ca γ să fie un drum de lungime minimă pe S de la $\gamma(a)$ la $\gamma(b)$, trebuie deci să fie un punct extremal pentru integrala $s(\gamma)$. Se spune că γ este o *geodezică*

pe S dacă este un punct extremal (cu punctele finale fixe) pentru integrala

$$\int_a^b \left[E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right] dt,$$

care este mult mai simplă de manipulat.

EXEMPLUL 4.2.15. (i). Se presupune că $f(x_1, x_2, y_1, y_2, t)$ este independent de t , deci $\partial f / \partial t = 0$. Dacă $\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t))$ este un punct extremal pentru

$$\int_a^b f \left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, t \right) dt,$$

se poate deduce că

$$x_1'(t) \frac{\partial f}{\partial y_1}(\varphi(t), \varphi'(t), t) + x_2'(t) \frac{\partial f}{\partial y_2}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - f(\varphi(t), \varphi'(t), t) = c$$

este constantă pentru $t \in [a, b]$, utilizând

$$\frac{d}{dt} \left(x_1' \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2' \frac{\partial f}{\partial y_2} - f \right) = - \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right) \right] - \frac{\partial f}{\partial t}.$$

(ii). Dacă $f(u, v, u', v') = E(u, v)(u')^2 + 2F(u, v)u'v' + G(u, v)(v')^2$, se poate deduce că

$$u' \frac{\partial f}{\partial u'} + v' \frac{\partial f}{\partial v'} = 2f.$$

(iii). Din (i) și (ii) se deduce că o geodezică φ pe suprafața S este o curbă cu viteză constantă, i.e. $|\varphi'(t)| = c$.

EXEMPLUL 4.2.16. Se va nota cu $C^2[a, b]$ spațiul vectorial al funcțiilor de două ori derivabile cu derivata a doua continuă pe $[a, b]$ și cu $C_0^2[a, b]$ subspațiul constând din acele funcții $\psi \in C^2[a, b]$ astfel încât $\psi(a) = \psi'(a) = \psi(b) = \psi'(b) = 0$.

(i). Se deduce simplu că

$$\|\psi\|_1' = \max_{t \in [a, b]} |\psi(t)| + \max_{t \in [a, b]} |\psi'(t)| + \max_{t \in [a, b]} |\psi''(t)|$$

definește o normă pe $C^2[a, b]$.

(ii). Pentru o funcție de clasă C^2 $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, se definește $F : C^2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ prin

$$F(\psi) = \int_a^b f(\psi(t), \psi'(t), \psi''(t), t) dt.$$

Analog demonstrației Teoremei 4.2.1, F este diferențiabilă cu

$$dF_\varphi(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} h(t) + \frac{\partial f}{\partial y} h'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} h''(t) \right) dt,$$

unde derivatele parțiale ale lui f sunt evaluate în $(\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t), t)$.

(iii). Integrând prin părți (analog demonstrației Corolarului 4.2.2), rezultă că

$$dF_\varphi(h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] h(t) dt,$$

dacă $h \in C_0^2[a, b]$.

(iv). În concluzie, φ satisface ecuația Euler-Lagrange de ordinul doi

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0,$$

dacă φ este un punct extremal pentru F , supus unor condiții pentru φ și φ' (presupunând că φ este de clasă C^4 , ecuația de mai sus este o ecuație diferențială ordinară de ordinul al patrulea în φ).

4.3. Problema izoperimetrică

Se va studia așa-numita problemă izoperimetrică. Dându-se funcțiile $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, se dorește maximizarea sau minimizarea funcției

$$(4.3.1) \quad F(\psi) = \int_a^b f(\psi(t), \psi'(t), t) dt,$$

cu condițiile $\psi(a) = \alpha$, $\psi(b) = \beta$ și "legătura"

$$(4.3.2) \quad G(\psi) = \int_a^b f(\psi(t), \psi'(t), t) dt = c \quad (\text{constant}).$$

Ca și în Secțiunea anterioară, se va nota cu M hiperplanul din $C^1[a, b]$ format din toate funcțiile de clasă C^1 $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\psi(a) = \alpha$ și $\psi(b) = \beta$; problema este atunci de a localiza extremele locale ale funcției F pe mulțimea $M \cap G^{-1}(c)$.

Există o asemănare între această problemă și problemele de extreme cu legături clasice - singura diferență este că aici funcțiile F și G sunt definite pe spațiul vectorial normat de dimensiune infinită $C^1[a, b]$, mai degrabă decât pe un spațiu euclidian finit dimensional. Deci metoda noastră de atac va fi să generalizăm în mod corespunzător metoda multiplicatorilor Lagrange, astfel încât să se aplice și în acest context.

Se va recapitula pe scurt "metoda multiplicatorilor Lagrange" pe cazul finit dimensional:

Se consideră $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funcții de clasă C^1 astfel încât $G(\mathbf{0}) = 0$ și $\nabla G(\mathbf{0}) \neq 0$. Dacă F are un maxim local sau un minim local la 0 supus constrângerii $G(\mathbf{x}) = 0$, atunci există un număr λ astfel încât

$$(4.3.3) \quad \nabla F(\mathbf{0}) = \lambda \nabla G(\mathbf{0}).$$

Deoarece diferențialele $dF_{\mathbf{0}}, dG_{\mathbf{0}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sunt date de

$$dF_{\mathbf{0}}(\mathbf{v}) = \nabla F(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{v} \quad \text{și} \quad dG_{\mathbf{0}}(\mathbf{v}) = \nabla G(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{v},$$

ecuația (4.3.1) poate fi rescrisă

$$(4.3.4) \quad dF_0 = \Lambda \circ dG_0,$$

unde $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția liniară definită de $\Lambda(t) = \lambda t$.

Ecuația (4.3.4) prezintă metoda multiplicatorilor Lagrange într-o formă care este potrivită pentru generalizare la spații vectoriale normate (unde sunt disponibile diferențiale, dar vectorii gradient nu sunt). Pentru demonstrație vom avea nevoie de următoarea leamnă algebrică elementară.

LEMA 4.3.1. *Fie α și $\beta : E \rightarrow \mathbb{R}$ funcții liniare reale definite pe spațiul vectorial E astfel încât*

$$\text{Ker } \alpha \supset \text{Ker } \beta, \text{ Im } \beta = R.$$

Atunci există o funcție liniară $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha = \Lambda \circ \beta$.

DEMONSTRAȚIE. Pentru $t \in \mathbb{R}$, se consideră $x \in E$ astfel încât $\beta(x) = t$ și definită

$$\Lambda(t) = \alpha(x).$$

Pentru a arăta că Λ este bine definit, trebuie să vedem că, dacă y este un alt element al lui E cu $\beta(y) = t$, atunci $\alpha(x) = \alpha(y)$. Dar dacă $\beta(x) = \beta(y) = t$, atunci $x - y \in \text{Ker } \beta \subset \text{Ker } \alpha$, deci $\alpha(x - y) = 0$, ceea ce implică imediat că $\alpha(x) = \alpha(y)$. Dacă $\beta(x) = s$ și $\beta(y) = t$, atunci

$$\begin{aligned} \Lambda(as + bt) &= \alpha(ax + by) \\ &= a\alpha(x) + b\alpha(y) \\ &= a\Lambda(s) + b\Lambda(t), \end{aligned}$$

deci Λ este liniar. $\square$

Următoarea teoremă stabilește metoda multiplicatorilor Lagrange în cazul general (infini dimensional).

TEOREMA 4.3.2. *Fie F și G funcții reale de clasă C^1 pe întreg spațiul vectorial normat complet E , cu $G(0) = 0$ și $dG_0 \neq 0$ (deci $\text{Im } dG_0 = \mathbb{R}$). Dacă $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ are un punct de extrem local în 0 cu legătura $G(x) = 0$, atunci există o funcție liniară $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât*

$$(4.3.5) \quad dF_0 = \Lambda \circ dG_0.$$

Afirmația că „ F are un punct de extrem local în 0 cu legătura $G(x) = 0$ ”, înseamnă că restricția $F|_{G^{-1}(0)}$ are un punct de extrem local în $0 \in G^{-1}(0)$.

DEMONSTRAȚIE. Concluzia va decurge din Lema 4.3.1, cu $\alpha = dF_0$ și $\beta = dG_0$, dacă putem demonstra că $\text{Ker } dF_0$ conține $\text{Ker } dG_0$. Pentru a realiza aceasta, să presupunem mai întâi faptul (care urmează să fie stabilit ulterior) că, pentru $v \in \text{Ker } dG_0$, există un drum diferențiabil $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow E$ a cărui imagine se află în $G^{-1}(0)$, astfel încât $\gamma(0) = 0$ și $\gamma'(0) = v$ (a se vedea Figura 4.3.1).

Atunci compunerea $h = F \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ are un punct de extrem local în 0 , deci $h'(0) = 0$. Prin urmare, din regula lanțului rezultă

$$\begin{aligned} 0 &= h'(0) = dh_0(1) = dF_{\gamma(0)}(d\gamma_0(1)) \\ &= dF_0(\gamma'(0)), \\ 0 &= dF_0(v), \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. $\square$

Se va folosi "Teorema funcțiilor implicite" pentru a verifica existența drumului diferențial γ utilizat mai sus. Dacă $X = \text{Ker } dG_0$ atunci, deoarece $dG_0 : E \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, X este un subspațiu închis al E și, prin urmare, este complet. Se alege $w \in E$ astfel încât $dG_0(w) = 1$ și se va nota cu Y subspațiul închis al lui E format din toți multiplii scalari ai w ; atunci Y este o „copie” a lui $\mathbb{R}$.

Este clar că $X \cap Y = 0$. De asemenea, dacă $e \in E$ și $a = dG_0(e) \in \mathbb{R}$, atunci

$$dG_0(e - aw) = dG_0(e) - adG_0(w) = 0$$

deci $e - aw \in X$. Prin urmare

$$e = x + y$$

cu $x \in X$ și $y = \varphi(x) \in Y$. Astfel E este suma algebrică directă a subspațiilor X și Y . Mai mult, este adevărat (deși omitem dovada) că norma pe E este echivalentă cu norma produsului pe $X \times Y$, așa că putem scrie $E = X \times Y$. Pentru a aplica "Teorema funcțiilor implicite", trebuie să știm că $d_y G_0 : Y \rightarrow \mathbb{R}$ este un izomorfism. Deoarece $Y \approx \mathbb{R}$, trebuie doar să arătăm că $d_y G_0 \neq 0$. Dar, dat $(r, s) \in X \times Y = E$, avem

$$\begin{aligned} dG_0(r, s) &= dG_0(r, 0) + dG_0(0, s) \\ &= dG_0(0, s) \\ &= d_y G_0(s) \end{aligned}$$

deci ipoteza că $d_y G_0 = 0$ ar implica că $dG_0 = 0$, contrar ipotezei.

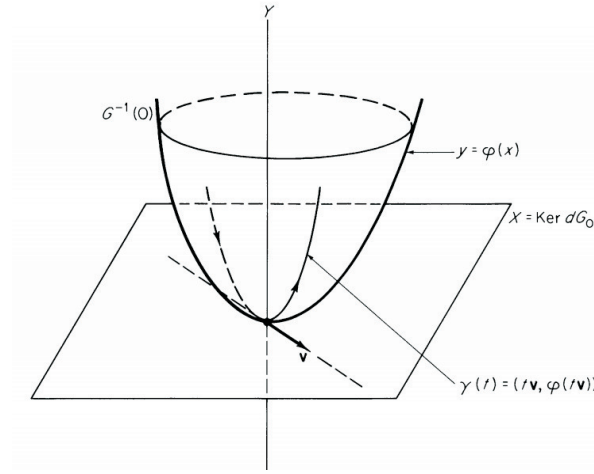


FIGURA 4.3.1. Demonstrația Teoremei 4.3.2

În consecință, "Teorema funcțiilor implicite" produce o funcție de clasă C^1 $\varphi : X \rightarrow Y$ al cărei grafic $y = \varphi(x)$ în $X \times Y = E$ coincide cu $G^{-1}(0)$, în interiorul unei vecinătăți a lui 0. Dacă $H(x) = G(x, \varphi(x))$, atunci $H(x) = 0$ pentru x aproape de 0, deci

$$\begin{aligned} 0 &= dH_0(u) = d_x G_0(u) + d_y G_0(d\varphi_0(u)) \\ &= d_y G_0(d\varphi_0(u)) \end{aligned}$$

pentru toți $u \in X$. Rezultă deci că $d\varphi_0 = 0$, deoarece $d_y G_0$ este un izomorfism. În cele din urmă, dat $v = (u, 0) \in \text{Ker } dG_0$, se definește $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E$ prin $\gamma(t) = (tu, \varphi(tu))$. Atunci $\gamma(0) = 0$ și $\gamma(t) \in G^{-1}(0)$ pentru t suficient de mic și

$$\gamma'(0) = (u, d\varphi_0(u)) = (u, 0) = v$$

așa cum se dorea.

Acum se poate discuta în sfârșit problema izoperimetrică. Fie f și g funcții reale de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^3$ și se definesc funcțiile reale F și G pe $C^1[a, b]$ prin

$$(4.3.6) \quad F(\psi) = \int_a^b f(\psi(t), \psi'(t), t) dt,$$

$$(4.3.7) \quad G(\psi) = \int_a^b g(\psi(t), \psi'(t), t) dt - c,$$

unde $c \in \mathbb{R}$. Se presupune că φ este un element de clasă C^2 al lui $C^1[a, b]$ în care F are un extrem local pe $M \cap G^{-1}(0)$, unde M este hiperplanul obișnuit în $C^1[a, b]$ care este determinat de condițiile $\psi(a) = \alpha$ și $\psi(b) = \beta$.

S-a văzut (în Secțiunea anterioară) că M este translația (prin orice element fixat al lui M) a subspațiului $C_0^1[a, b]$ al lui $C^1[a, b]$ format din elementele $\psi \in C^1[a, b]$ cu $\psi(a) = \psi(b) = 0$. Fie $T : C_0^1[a, b] \rightarrow M$ translația definită de

$$T(\psi) = \psi + \varphi.$$

Se observă că $T(0) = \varphi$, în timp ce

$$dT_0 : C_0^1[a, b] \rightarrow C_0^1[a, b] = TM_\varphi$$

este aplicația "identitate".

Se vor considera funcțiile reale $F \circ T$ și $G \circ T$ pe $C_0^1[a, b]$. Faptul că F are un extrem local pe $M \cap G^{-1}(0)$ în φ implică faptul că $F \circ T$ are un extrem local în 0 cu condiția $G \circ T(\psi) = 0$.

Se presupune că φ nu este un extrem pentru G pe M , adică că

$$dG_{\varphi|TM_\varphi} \neq 0,$$

deci $d(G \circ T)_0 \neq 0$. Atunci Teorema 4.3.2 se aplică pentru a furniza o funcție liniară $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$d(F \circ T)_0 = \Lambda \circ d(G \circ T)_0.$$

Deoarece dT_0 este aplicația identitate pe $C_0^1[a, b]$, regula lanțului dă

$$dF_\varphi = \Lambda \circ dG_\varphi$$

pe $C_0^1[a, b]$. Scriind $\Lambda(t) = \lambda t$ și aplicând calculul din Corolarul 4.2.2 pentru diferențialele dF_φ și dG_φ , concluzionăm că

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) \right] u(t) dt = \\ & = \lambda \int_a^b \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) \right] u(t) dt, \end{aligned}$$

pentru toți $u \in C_0^1[a, b]$.

Dacă $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ este definit de

$$h(x, y, t) := f(x, y, t) - \lambda g(x, y, t),$$

rezultă că

$$\int_a^b \left[\frac{\partial h}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) \right] u(t) dt = 0,$$

pentru toți $u \in C_0^1[a, b]$. O aplicare a Lemei 4.2.4 completează în final demonstrația următoarei teoreme.

TEOREMA 4.3.3. *Fie F și G funcțiile reale pe $C^1[a, b]$ definite de (4.3.6) și (4.3.7), unde f și g sunt funcții de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^3$. Fie $\varphi \in M$ o funcție de clasă C^2 care nu este un extrem pentru G . Dacă F are un extrem local în φ cu condițiile*

$$\psi(a) = \alpha, \quad \psi(b) = \beta, \quad \text{și} \quad G(\psi) = 0,$$

atunci există un număr real λ astfel încât φ satisface ecuația Euler-Lagrange pentru funcția $h = f - \lambda g$, adică

$$(4.3.8) \quad \frac{\partial h}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) = 0,$$

pentru toți $t \in [a, b]$.

Următoarea aplicație a acestei teoreme este cea care a dat numele de "izoperimetrică" unor astfel de probleme cu legături în calculul variațional.

EXEMPLUL 4.3.4. Să presupunem că $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este acea funcție nenegativă (dacă există) cu $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ al cărei grafic $x = \varphi(t)$ are lungimea L , astfel încât aria de sub graficul său este maximă. Vrem să demonstrăm că graficul $x = \varphi(t)$ trebuie să fie un arc de cerc (Figura 4.3.2).

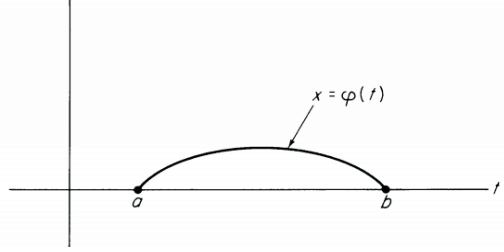


FIGURA 4.3.2. Un arc de cerc

Dacă $f(x, y, t) = x$ și $g(x, y, t) = \sqrt{1 + y^2}$, atunci φ maximizează integrala

$$\int_a^b f(\varphi(t), \varphi'(t), t) dt,$$

cu condițiile

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \quad \text{și} \quad \int_a^b g(\varphi(t), \varphi'(t), t) dt = L.$$

Deoarece $\partial f / \partial x = 1$, $\partial f / \partial y = \partial g / \partial x = 0$, $\partial g / \partial y = y / \sqrt{1 + y^2}$, ecuația Euler-Lagrange (4.3.8) este

$$1 - \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{\varphi'(t)}{1 + (\varphi'(t))^2} \right) = 0,$$

sau

$$\frac{\varphi''(t)}{[1 + (\varphi'(t))^2]^{3/2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Această ultimă ecuație spune că curbura curbei $t \rightarrow (t, \varphi(t))$ este constanta $1/\lambda$. Prin urmare, imaginea sa trebuie să facă parte dintr-un cerc.

OBSERVAȚIA 4.3.5. Discuția de mai sus a problemei izoperimetrice se generalizează într-o manieră directă în cazul în care există mai mult de o legătură. Având în vedere funcțiile C^2 $f, g_1, \dots, g_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dorim să minimizăm sau să maximizăm funcția

$$(4.3.9) \quad F(\psi) = \int_a^b f(\psi(t), \psi'(t), t) dt,$$

cu condițiile $\psi(a) = \alpha$, $\psi(b) = \beta$ și legăturile

$$(4.3.10) \quad G_i(\psi) = \int_a^b g_i(\psi(t), \psi'(t), t) dt - c_i = 0.$$

Problema noastră este atunci să găsim extremele locale ale lui F pe $M \cap G^{-1}(0)$, unde M este hiperplanul obișnuit în $C^1[a, b]$ și

$$G = (G_1, \dots, G_k) : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Rezultatul, analog Teoremei 4.3.3, este următorul:

Fie $\varphi \in M$ o funcție de clasă C^2 care nu este un extrem pentru orice combinație liniară a funcțiilor $G_1, \dots, G_k$. Dacă F are un extrem local în φ cu condițiile

$$\psi(a) = \alpha, \quad \psi(b) = \beta, \quad \text{și} \quad G(\psi) = \mathbf{0},$$

atunci există numere $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ astfel încât φ satisface ecuația Euler-Lagrange pentru funcția

$$h = f - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i.$$

Includerea detaliilor complete ale demonstrației ar fi repetitivă, așa că pur și simplu subliniem modificările necesare față de demonstrația Teoremei 4.3.3.

Întâi Lema 4.3.1 și apoi Teorema 4.3.2 sunt ușor de generalizat după cum urmează. În Lema 4.3.1 se consideră că β este o aplicație liniară de la E la $\mathbb{R}^k$ cu $\text{Im } \beta = \mathbb{R}^k$, iar în Teorema 4.3.2 se consideră că G este o aplicație de clasă C^1 de la E la $\mathbb{R}^k$ astfel încât $G(0) = \mathbf{0}$ și $\text{Im } dG_0 = \mathbb{R}^k$. Singura modificare este că, în concluzia fiecăruia, Λ devine o funcție liniară cu valori reale definită pe $\mathbb{R}^k$. Dovezile rămân în esență aceleași.

Apoi se aplică Teorema generalizată 4.3.2 aplicațiilor $F : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $G : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$, definite prin (4.3.9) și (4.3.10), în același mod în care s-a aplicat Teorema originală 4.3.2 (în demonstrația Teoremei 4.3.3) la funcțiile definite de (4.3.6) și (4.3.7). Singura observație suplimentară necesară este că, dacă φ nu este un punct extremal pentru nicio combinație liniară a funcțiilor componente $G_1, \dots, G_k$, atunci rezultă ușor că dG_φ aplică TM_φ pe $\mathbb{R}^k$. Conchidem apoi, ca mai sus, că

$$dF_\varphi = \Lambda \circ dG_\varphi \quad \text{pe} \quad C_0^1[a, b],$$

pentru o funcție liniară $\Lambda : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Scriind $\Lambda(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, ajungem la concluzia că

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[\text{și} \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) \right] u(t) dt = \\ & = \sum_{i=1}^k \lambda_i \int_a^b \left[\frac{\partial g_i}{\partial x}(\varphi(t), \varphi'(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial g_i}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t), t) \right] u(t) dt, \end{aligned}$$

pentru oricare $u \in C_0^1[a, b]$. Aplicând Lema 4.2.4 rezultă că φ satisface ecuația Euler-Lagrange pentru $h = f - \sum \lambda_i g_i$.

OBSERVAȚIA 4.3.6. (i). Se poate generaliza problema izoperimetrică la cazul cu "vectorial" după cum urmează:

Fie $f, g : \mathbb{A}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcții și să presupunem că $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ este un punct extremal pentru

$$F(\psi) = \int_a^b f(\psi(t), \psi'(t), t) dt,$$

cu condițiile $\psi(a) = \alpha, \psi(b) = \beta$ și

$$G(\psi) = \int_a^b g(\psi(t), \psi'(t), t) dt = c.$$

În condiții de regularitate corespunzătoare, pentru un număr λ , drumul φ satisface ecuațiile Euler-Lagrange

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

pentru funcția $h = f - \lambda g$.

(ii). Fie $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ o curbă închisă din plan, $\varphi(a) = \varphi(b)$ și $\varphi(t) = (x(t), y(t))$. Din (i) rezultă că, dacă φ maximizează integrala ariei

$$\frac{1}{2} \int_a^b (xy' - yx') dt,$$

supusă condiției

$$\int_a^b \left((x')^2 + (y')^2 \right)^{1/2} dt = L \quad (\text{constant}),$$

atunci imaginea lui φ este un cerc.

4.4. Probleme de integrale multiple

Până acum, ne-am limitat atenția la problemele punct de extrem asociate cu integrala simplă $\int_a^b f(\psi(t), \psi'(t), t) dt$, unde ψ este o funcție a unei variabile. În această secțiune discutăm pe scurt problemele analoge asociate cu o integrală multiplă al cărei integrand este o funcție „necunoscută” de mai multe variabile. Fie D o regiune din $\mathbb{R}^n$. Pentru $f : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, căutăm să maximizăm sau să minimizăm funcția F definită de

$$(4.4.1) \quad F(\psi) = \int_D f \left(x_1, \dots, x_n, \psi(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) d\mathbf{x},$$

cu funcții de clasă C^1 $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ care sunt egale cu o funcție fixă dată $\psi_0 : D \rightarrow \mathbb{R}$ pe frontiera ∂D a lui D . În ceea ce privește vectorul gradient

$$\nabla \psi(\mathbf{x}) = (D_1 \psi(\mathbf{x}), \dots, D_n \psi(\mathbf{x})),$$

putem rescrie (4.4.1) ca

$$(4.4.2) \quad F(\psi) = \int_D f(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}), \nabla \psi(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

Pe parcursul acestei secțiuni se vor nota primele n coordonate în $\mathbb{R}^{2n+1}$ cu $x_1, \dots, x_n$, coordonata $(n+1)$ -a cu y , iar ultimele n coordonate în $\mathbb{R}^{2n+1}$ cu $z_1, \dots, z_n$. Astfel, se va scrie $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ iar $(\mathbf{x}, y, \mathbf{z})$ este punctul tipic al lui $\mathbb{R}^{2n+1}$. În ceea ce privește această notație, ne interesează funcția

$$F(\psi) = \int_D f(\mathbf{x}, y, \mathbf{z}) d\mathbf{x},$$

unde $y = \psi(\mathbf{x})$ și $z = \nabla\psi(\mathbf{x})$.

Funcția F este definită de (4.4.2) pe spațiul vectorial $C^1(D)$ care constă din toate funcțiile de clasă C^1 cu valori reale definite pe D (cu adunarea punctuală și înmulțirea cu scalari obișnuite). Transformăm $C^1(D)$ într-un spațiu vectorial normat prin definirea

$$(4.4.3) \quad \|\psi\| = \max_{\mathbf{x} \in D} |\psi(\mathbf{x})| + \max_{\mathbf{x} \in D} |\nabla\psi(\mathbf{x})|.$$

Se poate verifica apoi că spațiul vectorial normat $C^1(D)$ este complet. Demonstrația acestui fapt este similară cu cea a Corolarului 3.1.19 (pentru $C^1[a, b]$ complet), dar este mai laborioasă și se omite.

Fie M submulțimea lui $C^1(D)$ constând din acele funcții ψ care satisfac „condiția la limită”

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi_0(\mathbf{x}) \quad \text{dacă} \quad \mathbf{x} \in \partial D.$$

Apoi, dându-se $\psi \in M$, diferența $\psi - \psi_0$ este un element al subspațiului

$$C_0^1(D) = \{\varphi \in C^1(D) : \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{dacă} \quad \mathbf{x} \notin \partial D\}$$

lui $C^1(D)$, constând din toate acele funcții de clasă C^1 definite pe D care se anulează pe ∂D . În schimb, dacă $\varphi \in C_0^1(D)$, atunci în mod clar $\psi_0 + \varphi \in M$. Astfel M este un hiperplan în $C^1(D)$ și anume translația prin elementul fix $\psi_0 \in M$ a subspațiului $C_0^1(D)$. prin urmare

$$TM_\psi = C_0^1(D)$$

pentru toți $\psi \in M$.

Dacă $F : C^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$ este diferentiabil la $\varphi \in M$, iar $F|_M$ are un punct de extrem local la φ , Teorema 3.3.10 implică faptul că

$$(4.4.4) \quad dF_\varphi(h) = 0 \quad \text{for all } h \in C_0^1(D).$$

La fel ca în cazul cu o singură variabilă, vom numi funcția $\varphi \in M$ extremă pentru F pe M dacă îndeplinește condiția necesară (4.4.4).

Următoarea teoremă este analogă cu Teorema 4.2.1 și oferă calculul diferențialei dF_φ pentru F definit de (4.4.1).

TEOREMA 4.4.1. *Să presupunem că D este o regiune compactă celulată n -dimensională în $\mathbb{R}^n$ și că $f : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^2 . Atunci funcția $F : C^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$ definită de (4.4.1) este diferentiabilă cu*

$$(4.4.5) \quad dF_\varphi(h) = \int_D \left[\frac{\partial f}{\partial y} \cdot h(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{x},$$

pentru toți $\varphi, h \in C^1(D)$. Derivatele parțiale

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}$$

în (4.4.5) sunt evaluate în punctul $(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}), \nabla\varphi(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

Metoda de demonstrație a Teoremei 4.4.1 este aceeași cu cea a Teoremei 4.2.1, folosind dezvoltarea Taylor de gradul doi a lui f .

Având în vedere condiția (4.4.4), ne interesează valoarea lui $dF_\varphi(h)$ când $h \in TM_\varphi = C_0^1(D)$. Următoarea teoremă este analoagă Corolarului 4.2.2.

TEOREMA 4.4.2. *Se presupune, pe lângă ipotezele Teoremei 4.4.1, că φ este o funcție C^2 și că $h \in C_0^1(D)$. Atunci*

$$(4.4.6) \quad dF_\varphi(h) = \int_D \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right) \right] h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Aici, derivatele parțiale ale lui f sunt evaluate în $(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}), \nabla \varphi(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

DEMONSTRAȚIE. Se consideră $(n-1)$ -forma diferențială definită pe D prin

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial z_i} h dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Un calcul de rutină dă

$$d\omega = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right) h \right) \right] d\mathbf{x},$$

unde $d\mathbf{x} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Prin urmare

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} = d\omega - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right) h \right) d\mathbf{x}.$$

Înlocuind aceasta în ecuația (4.4.5), obținem

$$(4.4.7) \quad dF_\varphi(h) = \int_D \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right) \right] h d\mathbf{x} + \int_D d\omega.$$

Dar $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega = 0$ din Teorema lui Stokes 2.6.3 și faptul că $\omega = 0$ pe ∂D deoarece $h \in C_0^1(D)$. Astfel ecuația (4.4.7) se reduce la ecuația (4.4.6). $\square$

OBSERVAȚIA 4.4.3. Teorema 4.4.2 arată că funcția de clasă C^2 $\varphi \in M$ este un extrem pentru F pe M dacă și numai dacă

$$\int_D \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right) \right] h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0,$$

pentru fiecare $h \in C_0^1(D)$. Din acest rezultat și analogul multidimensional evident al Lemei 4.2.4 obținem imediat ecuația multidimensională Euler-Lagrange.

TEOREMA 4.4.4. *Fie $F : C^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$ definit prin ecuația (4.4.1), cu $f : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ fiind o funcție de clasă C^2 . Atunci funcția de clasă C^2 $\varphi \in M$ este un extrem pentru F pe M dacă și numai dacă*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}), \nabla \varphi(\mathbf{x})) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial z_i}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}), \nabla \varphi(\mathbf{x})) = 0,$$

pentru toți $\mathbf{x} \in D$.

Ecuția

$$(4.4.8) \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right) = 0,$$

cu derivatele parțiale ale lui f evaluate în $(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}), \nabla \varphi(\mathbf{x}))$, este ecuația Euler-Lagrange pentru punctul extremal φ . Dăm câteva exemple pentru a ilustra aplicațiile sale.

EXEMPLUL 4.4.5 (Suprafețe minimale). Dacă D este un disc în plan și $\varphi_0 : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție, atunci graficul lui φ_0 este un disc în $\mathbb{R}^3$. Luăm în considerare următoarea întrebare. În ce condiții graficul (Figura 4.4.1) al funcției $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ are o suprafață minimă, printre graficele tuturor acelor funcții $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ care coincid cu φ_0 pe curba de frontieră ∂D a discului D ?

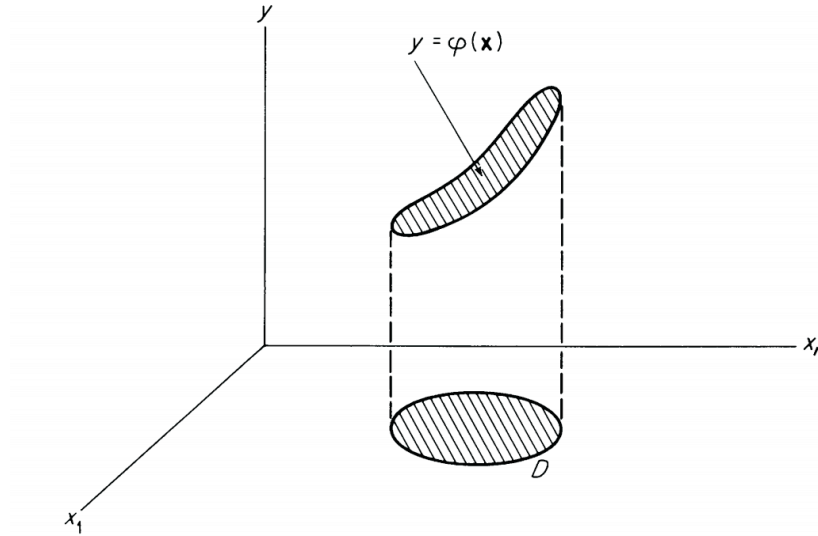


FIGURA 4.4.1. Graficul lui $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$

Se poate discuta generalizarea n -dimensională a acestei întrebări. Deci, începem cu o n -varietate-cu-bord compactă $D \subset \mathbb{R}^n$ și o funcție de clasă C^1 $\varphi_0 : D \rightarrow \mathbb{R}$, al cărui grafic $y = \varphi_0(\mathbf{x})$ este o n -varietate-cu-bord în $\mathbb{R}^{n+1}$ (a se vedea Secțiunea 2.5).

Aria $F(\varphi)$ a graficului funcției $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ este (conform cu (2.7.8))

$$F(\varphi) = \int_D [1 + |\nabla \varphi(\mathbf{x})|^2]^{1/2} d\mathbf{x}.$$

Prin urmare, dorim să minimizăm funcția $F : C^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$ definită de (4.4.1) cu

$$f(\mathbf{x}, y, \mathbf{z}) = (1 + z_1^2 + \cdots + z_n^2)^{1/2}.$$

Cum

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{z_i}{(1 + z_1^2 + \cdots + z_n^2)^{1/2}},$$

ecuația Euler-Lagrange (4.4.8) pentru această problemă este

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} [1 + |\nabla \varphi|^2]^{-1/2} \right) = 0$$

După calcularea derivatelor parțiale indicate și simplificare, obținem

$$(4.4.9) \quad (1 + |\nabla \varphi|^2) \nabla^2 \varphi = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j},$$

unde

$$\nabla^2 \varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2},$$

ca de obicei. Prin urmare, ecuația (4.4.9) oferă o condiție necesară ca aria graficului lui $y = \varphi(\mathbf{x})$ să fie minimă, printre toate n -varietățile-cu-bord din $\mathbb{R}^{n+1}$ care au aceeași limită.

În problema inițială a suprafețelor minime bidimensionale, se obișnuiește să se folosească notațiile

$$\begin{aligned} z &= \varphi(x, y), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \\ r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Cu această notație, ecuația (4.4.9) ia forma

$$(1 + q^2) r - 2pq s + (1 + p^2) t = 0,$$

care este o ecuație diferențială de ordinul doi cu funcția necunoscută $z = \varphi(x, y)$.

EXEMPLUL 4.4.6 (Membrana vibrantă). Se va aplica principiul lui Hamilton pentru a deriva ecuația de undă pentru mișcarea unei „membrane” n -dimensionale care vibrează. Cazurile $n = 1$ și $n = 2$ corespund unei coarde vibrante și, respectiv, unei membrane „uzuale”.

Presupunem că poziția de echilibru a membranei este n -varietatea-cu-bord compactă

$$W \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

și că vibrează cu limita fixată. Fie mișcarea acesteia descrisă de funcția

$$\varphi : W \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

în sensul că graficul $y = \varphi(\mathbf{x}, t)$ este poziția în $\mathbb{R}^{n+1}$ a membranei la momentul t (Figura 4.4.2).

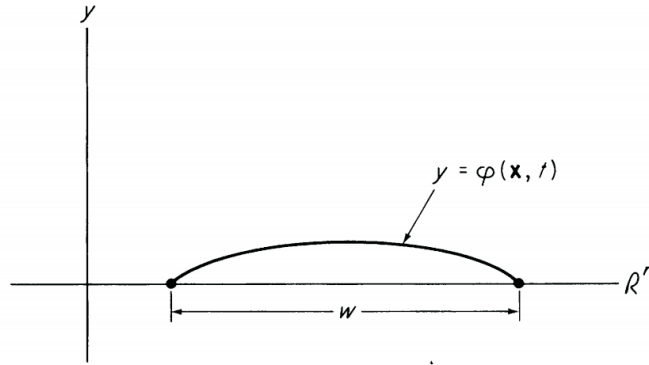


FIGURA 4.4.2. Graficul $y = \varphi(\mathbf{x}, t)$

Dacă membrana are densitatea constantă σ , atunci energia sa cinetică la momentul t este

$$(4.4.10) \quad T(t) = \frac{\sigma}{2} \int_W [D_2 \varphi(\mathbf{x}, t)]^2 d\mathbf{x} = \frac{\sigma}{2} \int_W \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 d\mathbf{x}.$$

Presupunem pentru început că energia potențială V a membranei este proporțională cu creșterea suprafeței acesteia, adică

$$V(t) = \tau(a(t) - a(0)),$$

unde $a(t)$ este aria membranei la momentul t . Constanta τ se numește „tensiune superficială”. Uzând de formula cunoscută pentru calculul ariei (formula (2.7.8)) rezultă

$$\begin{aligned} V(t) &= \tau \left(\int_W [1 + |\nabla \varphi|^2]^{1/2} d\mathbf{x} - \int_W d\mathbf{x} \right) \\ &= \tau \int_W \left[\left(1 + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \dots \right) - 1 \right] d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Presupunem acum că deformarea membranei este atât de ușoară încât termenii de ordin superior (indicați prin puncte) pot fi neglijăți. Energia potențială a membranei la momentul t este apoi dată de

$$(4.4.11) \quad V(t) = \frac{\tau}{2} \int_W |\nabla \varphi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Conform principiului lui Hamilton, mișcarea membranei este de așa natură încât valoarea integralei

$$\int_a^b [T(t) - V(t)] dt = \int_a^b \left(\int_W \left[\frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} |\nabla \varphi|^2 \right] d\mathbf{x} \right) dt$$

este minimă pentru fiecare interval de timp $[a, b]$; adică, dacă $D = W \times [a, b]$, atunci mișcarea actuală φ este un punct de extrem pentru funcția $F : C^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$ definită de

$$(4.4.12) \quad F(\psi) = \int_D \left[\frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 - \dots - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right)^2 \right],$$

pe hiperplanul $M \subset C^1(D)$ format din acele funcții ψ care coincid cu φ pe ∂D .

Dacă notăm $t = x_{n+1}$ și definim f pe $\mathbb{R}^{2n+3} = \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n+1}$ prin

$$f(\mathbf{x}, y, \mathbf{z}) = -\frac{\tau}{2} (z_1^2 + \dots + z_n^2) + \frac{\sigma}{2} z_{n+1}^2,$$

atunci putem rescrie (4.4.12) ca

$$F(\psi) = \int_D f(\mathbf{x}, y, \mathbf{z}) d\mathbf{x},$$

unde $y = \psi(\mathbf{x})$ și $\mathbf{z} = \nabla \psi(\mathbf{x})$. Cum

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_i} = -\tau z_i \quad \text{dacă} \quad i \leq n, \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} = \sigma z_{n+1},$$

rezultă că ecuația Euler-Lagrange (4.4.8) pentru această problemă este

$$\tau \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial x_i} \right) - \sigma \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x_{n+1}} = 0, \quad \mathbf{z} = \nabla \varphi(\mathbf{x}),$$

sau

$$(4.4.13) \quad \tau \nabla^2 \varphi = \sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Ecuația (4.4.13) se numește *ecuația de undă n -dimensională*.

Bibliografie

- [1] N. Boboc, *Analiză matematică*, vol. II, Editura Universității București, 1994.
- [2] C.H. Edwards, *Advanced calculus of several variables*, Academic Press, 1973.
- [3] A. Nuică, *Elemente de topologie și analiză funcțională*, Editura Tiparg, 2023.
- [4] A. Nuică, C. Udrea, *Spații metrice. Elemente de topologie și fractali*, Editura Tiparg, 2013.
- [5] D. Nuică, A. Nuică, *Analiză matematică. Curs și aplicații. Partea I*, Editura Tiparg, 2017.